第15回

2024年 5月 21日

目次

健康統計学 第15回

今回は、ノンパラメトリックな手法の仮説検定（107〜116ページ）について学習します。また、授業全体についてのまとめをします。
▲▼

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』縣 俊彦著（南江堂）

▲▼

今回の内容

1. 適合度の検定
2. 独立性の検定
3. 追加：対応のある2標本の比率の差の検定（マクネマー検定）
4. 対応のある2標本の比較(1)（符号検定）
5. 対応のある2標本の比較(2)（ウィルコクソンの符号付順位検定）
    - クラスカル・ウォリス検定は授業では取り上げません
6. 授業のまとめ
    - 期末試験について説明
    - 授業改善アンケートの実施

適合度の検定

- 観測値が、期待値（理論値）や、母集団の統計値（母数）に一致（適合）するかどうかを検定する。
- 変数は名義尺度になる（データは度数）。

▲▼

観測値と期待値

- ある事象が実際に観測された度数（データの数）を「**観測値**」という
  - 「**観測度数**」ともいう
- ある事象の理論上の度数（データの数）を「**期待値**」（理論値）という
  - 「**期待度数**」ともいう

	A_1	A_2	…	A_k	計
観測値（観測度数）	n_1	n_2	…	n_k	n
期待値（期待度数）	e_1	e_2	…	e_k	n

▲▼

適合度の検定（1標本カイ2乗検定）

▲▼

帰無仮説と対立仮説

観測値と期待値が一致するかどうかをどうかを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

  は「観測値と期待値は一致する」
- 対立仮説

$$H_1$$

  は「観測値と期待値は一致しない」

▲▼

検定統計量の算出

- 自由度

$$n-1$$

のカイ二乗（

$$\chi^2$$

）分布にしたがう、検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

を次の式から算出する

$$\chi_0{}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

▲▼

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

と、自由度

$$df = n-1$$

、有意水準

$$\alpha$$

の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
    - 帰無仮説

$$H_0$$

を棄却：

$$|\chi_0{}^2| > \chi^2$$

        - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
    - 帰無仮説

$$H_0$$

を採択：

$$|\chi_0{}^2| < \chi^2$$

        - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

独立性の検定

- 2つの変数に関連性があるか、つまり2つの変数の独立性を検定する。
- アンケートの結果の分析などに利用できる、基本的な手法のひとつ。

▲▼

分割表（クロス表）

▲▼

分割表とは

- 観測された2つの変数（要因と結果など）を組み合わせた表を、「**分割表（クロス表）**」という
    - クロス集計表ともいう
    - Excelでは「ピボットテーブル」の機能で作ることができる
- *k*行*l*列の表からなる分割表を、「***k*×*l*分割表**」という

	B_1	B_2	…	B_l	**計**
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
…	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_k	n_{k1}	n_{k2}	$\cdots$	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot l}$	n

- なお、周辺分布（右端の列や最下行の値）は、次のような意味になる。
    - 標本数 :

$$n_{\cdot l}$$

    - 第 *i* 行の標本数 :

$$n_{i\cdot}$$

    :
    - 第 *j* 行の標本数 :

$$n_{\cdot j}$$

    :

$$
\begin{aligned}
n_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{l} n_{ij} \\
n_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \\
n &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}
\end{aligned}
$$

▲▼

期待度数

- 分割表の各セルの期待値は、周辺分布の値から、次のように計算する。
  - i 行 j 列のセルの期待値 :

$$e_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= n \times \frac{n_{i\cdot}}{n} \times \frac{n_{\cdot j}}{n} \\
&= \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}
\end{aligned}
$$

▲▼

独立性の検定（2×2より大きい表の場合 : 自由度 *df* >1）

- 2行2列より大きい分割表の場合は、カイ二乗（

$$\chi^2$$

）分布を利用して検定する

▲▼

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

▲▼

検定統計量の算出

- 自由度

$$(k-1)\times(l-1)$$

のカイ二乗（

$$\chi^2$$

）分布にしたがう、検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

を次の式から算出する

$$\chi_0{}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

▲▼

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

と、自由度

$$df=(k-1)\times(l-1)$$

、有意水準

$$\alpha$$

の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説

$$H_0$$

を棄却 :

$$|\chi_0{}^2|>\chi^2$$

    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説

$$H_0$$

を採択 :

$$|\chi_0^2| < \chi^2$$

- 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

▲▼

独立性の検定（2×2表の場合：自由度 *df* =1）

- 2行2列の分割表の場合は、直接確率を計算するか、カイ二乗（

$$\chi^2$$

）分布に近似した検定統計量で検定する
  - フィッシャー(Fisher)の直接確率法
    - 標本数が20未満、または標本数が40未満で最小期待値が5未満の場合
  - イェーツ(Yates)の連続補正
    - 標本数が40未満で、フィッシャーの直接確率法の条件を満たさない場合
- ここでは、Yatesの連続補正について説明する

▲▼

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

▲▼

2×2分割表

- 観測値による分割表を、次のようにあらわす

	要因1	要因2	計
結果A	a	b	$a+b$
結果B	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

- 期待値による分割表は、次のような表になる

	要因1	要因2	計
結果A	$(a+b)\times\frac{a+c}{n}$	$(a+b)\times\frac{b+d}{n}$	$a+b$
結果B	$(c+d)\times\frac{a+c}{n}$	$(c+d)\times\frac{b+d}{n}$	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

▲▼

検定統計量の算出

- 2×2分割表では、次の式のような簡便な方法から、自由度

$$(2-1)\times(2-1)=1$$

  のカイ二乗（

$$\chi^2$$

  ）分布にしたがう、検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

  を次の式から算出できる

$$\chi_0{}^2=\frac{(ad-bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

- しかし、この方法では、計算した値が実際の

$$\chi^2$$

  分布とずれてしまうことがわかっている
    - 理由は、

$$\chi^2$$

      分布は連続的にもかかわらず、計算した検定統計量は離散的だから
- そこで、Yatesの連続補正を使って補正した、検定統計量

$$\chi_{0c}^2$$

を用いる

- 原則として、2×2分割表ではYatesの連続補正を使うと考えてよい

$$\chi_{0c}^2=\frac{\left(|ad-bc|-\frac{n}{2}\right)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

▲▼

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量

$$\chi_{0c}^2$$

と、自由度

$$df=(2-1)\times(2-1)=1$$

、有意水準

$$\alpha$$

の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする

- 帰無仮説

$$H_0$$

を棄却：

$$|\chi_{0c}^2|>\chi^2$$

  - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」

- 帰無仮説

$$H_0$$

を採択：

$$|\chi_{0c}^2|<\chi^2$$

  - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

対応のある2標本の比率の差の検定

- 対応のある2組の標本の比率の差を検定する。
- 教育や実験の前後で、被験者の「はい」「いいえ」などの回答が、どのように変化したかの比率を検定する

▲▼

検定の対象

対応のある2つの標本について考える。データをまとめると、次のような表になる。

		教育後		計
		はい	いいえ	
教育前	はい	a	b	$a+b$
	いいえ	c	d	$c+d$
	計	$a+c$	$b+d$	n

▲▼

マクネマー（McNemar）検定

- カイ二乗（

$$\chi^2$$

）分布を利用して検定する
- 回答が変化した個所（「はい」→「いいえ」、「いいえ」→「はい」）に着目する
  - 期待度数として、bとcの2か所の平均

$$\frac{b+c}{2}$$

を考えて検定をする

▲▼

帰無仮説と対立仮説

対応のある2つの標本の比率について調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2つの標本の比率に差はない」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2つの標本の比率に差がある」

▲▼

検定統計量の算出

$$\frac{b+c}{2}>5$$

- の場合…
  - 自由度1のカイ二乗（

$$\chi^2$$

    ）分布にしたがう、検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

    を次の式から算出する

$$\chi_0{}^2=\frac{(b-c)^2}{b+c}$$

  - Yatesの連続補正を使う場合は、次の式から検定統計量を算出する

$$\chi_0{}^2=\frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

$$\frac{b+c}{2}\leq 5$$

- の場合は、二項検定を利用して有意確率を求めるか、Yatesの連続補正を使う

▲▼

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量

$$\chi_0{}^2$$

  と、自由度1、有意水準

$$\alpha$$

  の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説

$$H_0$$

    を棄却：

$$|\chi_0^2| > \chi^2$$

- **「有意に差がある」「検定の結果､有意である」**

○ **帰無仮説**

$$H_0$$

を採択 :

$$|\chi_0^2| < \chi^2$$

- **「有意に差はない」「検定の結果､有意でない」「差があるとはいえない」**

符号検定

- 中央値の差を検定する手法である
- 対応のある2つの標本（調査前と調査後、教育前と教育後など）について、それぞれのデータの対（各組）の大小（または優劣）関係にもとづいて検定する

▲▼

検定の対象

対応のある2組の標本（標本数は同じ）について考える。

- 例えば、ある教育の前と後の効果、実験の前と後の結果の違いなどを調べる

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	…	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	…	2	4
標本B	3	5	1	5	2	…	1	2

- 2つの標本のデータの各組を比較する
  - 「大きい（または、優れている）」となった組の数を
    $$n_1$$
    とする
  - 「小さい（または、劣っている）」となった組の数を
    $$n_2$$
    とする
  - 同じになった組は、検定から除外する

	1	2	3	4	5	…	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	…	2	4
標本B	3	5	1	5	2	…	1	2
A-B	＋	−	＋	−	0	…	＋	＋

- 試行回数が
  $$n_1+n_2$$
  と見なして考えると、2つの標本の中央値に差がないとすれば、「大きい」と「小さい」となる確率は
  $$\frac{1}{2}$$
  となるはず
- 標本数を

$$N = n_1 + n_2$$

とする

▲▼

符号検定（小標本：二項検定を利用）

- 標本数が少ない場合は、二項検定を利用して、正確な有意確率を求める

▲▼

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2組の標本の中央値に差がある」

▲▼

検定統計量の算出

- 試行回数が

$$n_1 + n_2$$

の状況で、帰無仮説が成り立つとすれば「大きい」と「小さい」となる確率は

$$\frac{1}{2}$$

となるのを利用

$$n_1$$

- と

$$n_2$$

の小さい方の値

$$m$$

以下に対応する符号が出現する確率を求める

$$m = \min(n_1, n_2)$$

- 二項検定を利用して､次の式から「

$$m$$

回以下」起きる確率を算出する

$$P_0 = 2\sum_{i=0}^{m} {}_NC_i\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

▲▼

仮説の判定

- 算出した有意確率（P値）と有意水準を比較する
  - 片側検定
    - 帰無仮説

      $$H_0$$

      を棄却 :

      $$P_0 < \alpha$$

    - 帰無仮説

      $$H_0$$

      を採択 :

      $$P_0 \geq \alpha$$

  - 両側検定
    - 帰無仮説

      $$H_0$$

      を棄却 :

      $$2P_0 < \alpha$$

    - 帰無仮説

      $$H_0$$

      を採択 :

      $$2P_0 \geq \alpha$$

▲▼

符号検定（大標本：標準正規分布を利用）

- 標本数が多い場合は、標準正規分布を利用して検定する

▲▼

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2組の標本の中央値に差がある」

▲▼

検定統計量の算出

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量

$$z_0$$

を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

- 二項分布は離散型の分布であるため、標準正規分布のような連続型の分布に近似すると、その精度はあまりよくない
- そこで、Yatesの連続補正をすることで、精度をよくする

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2| - 1}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

▲▼

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量

$$z_0$$

と、有意水準

$$\alpha$$

の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って，判定をする

- 帰無仮説

$$H_0$$

を棄却：

$$|z_0| > z(\alpha/2)$$

  - 「有意に差がある」「検定の結果，有意である」

- 帰無仮説

$$H_0$$

を採択：

$$|z_0| < z(\alpha/2)$$

  - 「有意に差はない」「検定の結果，有意でない」「差があるとはいえない」

ウィルコクソンの符号付順位検定

- 対応のある2つの標本について、それぞれのデータの対（各組）の差の順にもとづいて検定する
- 変数が順序尺度、もしくは、正規性があるか不明で間隔・比例尺度の場合に使うことができる

▲▼

検定の対象

対応のある2組の標本（標本数は同じ）について考える。
2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238

- 2つの標本のデータの各組を差

$$d_i = A_i - B_i$$

  の絶対値を求める
  - 差が0の組は、この後の手続きから除外する
- それぞれの差の絶対値

$$|d_i|$$

  に対応する組の数をもとに、差の絶対値の小さいほうから順位をつける
  - 同一順位の場合は、次のように扱う（平均順位）
    - 2位が2つある場合：2位と3位の中間 (2+3)/2=2.5位を順位とする
    - 4位が3つある場合：4位と5位と6位の中間 (4+5+6)/3=5位を順位とする
- 標本数

$$n$$

  を、差が0でない組の数とする

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238
差 *d*	-4	17	18	0	-2	-1	-5	-1	14	19
順位	4	7	8		3	1.5	5	1.5	6	9

▲▼

ウィルコクソンの符号付順位検定

- データ対の順位がわかる場合は、符号検定よりも効率が良い

▲▼

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の代表値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説

$$H_0$$

は「2組の標本の代表値に差はない」
- 対立仮説

$$H_1$$

は「2組の標本の代表値に差がある」

▲▼

検定統計量の算出

- 2つの標本の差

$$d_i$$

の順位の和を、次のように求める
  - 差

  $$d_i$$

  が正の値の順位の和を

  $$T+$$

  とする
  - 差

  $$d_i$$

  が負の値の順位の和を

  $$T-$$

  とする

$$T+$$

- と

$$T-$$

の小さい方の値を

$$T_0$$

とする。
- 標本数

$$n$$

  は、差が0でない組の数とする

$$T_0 = \min(T+, T-)$$

$$n \leq 25$$

- （または

$$n \leq 50$$

）の場合…
  - ウィルコクソンの符号付順位検定表から、標本数

$$n$$

    に対応する

$$T$$

    の値を求める

$$n > 25$$

- （または

$$n > 50$$

）の場合…
  - 平均

$$\mu_T$$

    と標準偏差

$$\sigma_T$$

    を次の式から求める

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$
$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

  - 標準正規分布にしたがう、検定統計量

$$z_0$$

    を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|T_0 - \mu_T|}{\sigma_T}$$

▲▼

仮説の判定（検定表からの算出）

$$n \leq 25$$

- （または

$$n \leq 50$$

 ）の場合…
  - 帰無仮説

$$H_0$$

 を棄却 :

$$T_0 \geq T$$

    - 「有意に差がある」「検定の結果､有意である」
  - 帰無仮説

$$H_0$$

 を採択 :

$$T_0 < T$$

    - 「有意に差はない」「検定の結果､有意でない」「差があるとはいえない」

$$n > 25$$

- （または

$$n > 50$$

 ）の場合…
- 検定統計量

$$z_0$$

 と､有意水準

$$\alpha$$

 の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って､判定をする
  - 帰無仮説

$$H_0$$

 を棄却 :

$$|z_0| > z(\alpha/2)$$

    - 「有意に差がある」「検定の結果､有意である」

○ **帰無仮説**

$$H_0$$

を採択 :

$$|z_0| < z(\alpha/2)$$

- **「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」**