

# 健康統計学 第15回

今回は、ノンパラメトリックな手法の仮説検定（107～116ページ）について学習します。また、授業全体についてのまとめをします。

## テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』 縣 俊彦著 (南江堂)

## 今回の内容

1. [適合度の検定](#)
2. [独立性の検定](#)
3. [追加:対応のある2標本の比率の差の検定](#) (マクネマー検定)
4. [対応のある2標本の比較\(1\)](#) (符号検定)
5. [対応のある2標本の比較\(2\)](#) (ウィルコクソンの符号付順位検定)
  - クラスカル・ウォリス検定は授業では取り上げません
6. 授業のまとめ
  - 期末試験について説明
  - 授業改善アンケートの実施

# 適合度の検定

- 観測値が、期待値(理論値)や、母集団の統計値(母数)に一致(適合)するかどうかを検定する。
- 変数は名義尺度になる(データは度数)。

## 観測値と期待値

- ある事象が実際に観測された度数(データの数)を「**観測値**」という
  - 「**観測度数**」ともいう
- ある事象の理論上の度数(データの数)を「**期待値**」(理論値)という
  - 「**期待度数**」ともいう

	$A_1$	$A_2$	...	$A_k$	計
観測値(観測度数)	$n_1$	$n_2$	...	$n_k$	$n$
期待値(期待度数)	$e_1$	$e_2$	...	$e_k$	$n$

## 適合度の検定(1標本カイ2乗検定)

### 帰無仮説と対立仮説

観測値と期待値が一致するかどうかをどうかを調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「観測値と期待値は一致する」
- 対立仮説  $H_1$  は「観測値と期待値は一致しない」

### 検定統計量の算出

- 自由度  $n-1$  のカイ二乗( $\chi^2$ )分布にしたがう、検定統計量  $\chi_0^2$  を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

## 仮説の判定(両側検定)

- 検定統計量  $\chi_0^2$  と、自由度  $df = n-1$ 、有意水準  $\alpha$  の有意点の値(カイ二乗分布表などから求める)を使って、判定をする
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $|\chi_0^2| > \chi^2$ 
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $|\chi_0^2| < \chi^2$ 
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

# 独立性の検定

- 2つの変数に関連性があるか、つまり2つの変数の独立性を検定する。
- アンケートの結果の分析などに利用できる、基本的な手法のひとつ。

## 分割表（クロス表）

分割表とは

- 観測された2つの変数（要因と結果など）を組み合わせた表を、「**分割表(クロス表)**」という
  - クロス集計表ともいう
  - Excelでは「ピボットテーブル」の機能で作ることができる
- $k$ 行列の表からなる分割表を、「 **$k \times l$ 分割表**」という

	$B_1$	$B_2$	...	$B_l$	計
$A_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1l}$	$n_{1\cdot}$
$A_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2l}$	$n_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
$A_k$	$n_{k1}$	$n_{k2}$	...	$n_{kl}$	$n_{k\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot l}$	$n$

- なお、周辺分布（右端の列や最下行の値）は、次のような意味になる。
  - 標本数： $n_{\cdot j}$
  - 第  $i$  行の標本数： $n_{i\cdot}$
  - 第  $j$  列の標本数： $n_{\cdot j}$

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^l n_{ij}$$
$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^k n_{ij}$$
$$n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij}$$

期待度数

- 分割表の各セルの期待値は、周辺分布の値から、次のように計算する。
  - $i$  行  $j$  列のセルの期待値： $e_{ij}$

$$e_{ij} = n \times \frac{n_{i\cdot}}{n} \times \frac{n_{\cdot j}}{n}$$
$$= \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$$

## 独立性の検定（ $2 \times 2$ より大きい表の場合：自由度 $df > 1$ ）

- $2$ 行 $2$ 列より大きい分割表の場合は、カイ二乗 ( $\chi^2$ ) 分布を利用して検定する

## 帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説  $H_1$  は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

## 検定統計量の算出

- 自由度  $(k-1) \times (l-1)$  のカイ二乗 ( $\chi^2$ ) 分布にしたがう、検定統計量  $\chi_0^2$  を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

## 仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量  $\chi_0^2$  と、自由度  $df = (k-1) \times (l-1)$ 、有意水準  $\alpha$  の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却： $|\chi_0^2| > \chi^2$ 
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択： $|\chi_0^2| < \chi^2$ 
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

## 独立性の検定（2x2表の場合：自由度 $df=1$ ）

- 2行2列の分割表の場合は、直接確率を計算するか、カイ二乗 ( $\chi^2$ ) 分布に近似した検定統計量で検定する
  - フィッシャー(Fisher)の直接確率法
    - 標本数が20未満、または標本数が40未満で最小期待値が5未満の場合
  - イェーツ(Yates)の連続補正
    - 標本数が40未満で、フィッシャーの直接確率法の条件を満たさない場合
- ここでは、Yatesの連続補正について説明する

## 帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説  $H_1$  は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

## 2x2分割表

- 観測値による分割表を、次のようにあらわす

	要因1	要因2	計
結果A	a	b	a+b
結果B	c	d	c+d
計	a+c	b+d	a+b+c+d = n

- 期待値による分割表は、次のような表になる

	要因1	要因2	計
結果A	$(a+b) \times \frac{a+c}{n}$	$(a+b) \times \frac{b+d}{n}$	$a+b$
結果B	$(c+d) \times \frac{a+c}{n}$	$(c+d) \times \frac{b+d}{n}$	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d = n$

### 検定統計量の算出

- $2 \times 2$ 分割表では、次の式のような簡便な方法から、自由度  $(2-1) \times (2-1) = 1$  のカイ二乗 ( $X^2$ ) 分布にしたがう、検定統計量  $X_0^2$  を次の式から算出できる

$$X_0^2 = \frac{(ad-bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

- しかし、この方法では、計算した値が実際の  $X^2$  分布とずれてしまうことがわかっている
  - 理由は、 $X^2$  分布は連続的にもかかわらず、計算した検定統計量は離散的だから
- そこで、Yatesの連続補正を使って補正した、検定統計量  $X_{0c}^2$  を用いる
  - 原則として、 $2 \times 2$ 分割表ではYatesの連続補正を使うと考えてよい

$$X_{0c}^2 = \frac{(|ad-bc| - \frac{n}{2})^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

### 仮説の判定 (両側検定)

- 検定統計量  $X_{0c}^2$  と、自由度  $df = (2-1) \times (2-1) = 1$ 、有意水準  $\alpha$  の有意点の値(カイ二乗分布表などから求める)を使って、判定をする
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $|X_{0c}^2| > X^2$ 
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $|X_{0c}^2| < X^2$ 
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

# 対応のある2標本の比率の差の検定

- 対応のある2組の標本の比率の差を検定する。
- 教育や実験の前後で、被験者の「はい」「いいえ」などの回答が、どのように変化したかの比率を検定する

## 検定の対象

対応のある2つの標本について考える。データをまとめると、次のような表になる。

		教育後		計
		はい	いいえ	
教育前	はい	$a$	$b$	$a+b$
	いいえ	$c$	$d$	$c+d$
計		$a+c$	$b+d$	$n$

## マクネマー（McNemar）検定

- カイ二乗 ( $\chi^2$ ) 分布を利用して検定する
- 回答が変化した個所（「はい」「いいえ」、「いいえ」「はい」）に着目する
  - 期待度数として、 $b$ と $c$ の2か所の平均  $\frac{b+c}{2}$  を考えて検定をする

### 帰無仮説と対立仮説

対応のある2つの標本の比率について調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2つの標本の比率に差はない」
- 対立仮説  $H_1$  は「2つの標本の比率に差がある」

### 検定統計量の算出

- $\frac{b+c}{2} > 5$  の場合...
  - 自由度1のカイ二乗 ( $\chi^2$ ) 分布にしたがう、検定統計量  $\chi_0^2$  を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

- Yatesの連続補正を使う場合は、次の式から検定統計量を算出する

$$\chi_0^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

- $\frac{b+c}{2} \leq 5$  の場合は、二項検定を利用して有意確率を求めるか、Yatesの連続補正を使う

### 仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量  $\chi_0^2$  と、自由度1、有意水準  $\alpha$  の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却： $|\chi_0^2| > \chi^2$ 
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択： $|\chi_0^2| < \chi^2$ 
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

# 符号検定

- 中央値の差を検定する手法である
- 対応のある2つの標本（調査前と調査後、教育前と教育後など）について、それぞれのデータの対（各組）の大小（または優劣）関係にもとづいて検定する

## 検定の対象

対応のある2組の標本（標本数は同じ）について考える。

- 例えば、ある教育の前と後の効果、実験の前と後の結果の違いなどを調べる

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2

- 2つの標本のデータの各組を比較する
  - 「大きい（または、優れている）」となった組の数を  $n_1$  とする
  - 「小さい（または、劣っている）」となった組の数を  $n_2$  とする
  - 同じになった組は、検定から除外する

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2
A-B	+	-	+	-	0	...	+	+

- 試行回数が  $n_1 + n_2$  と見なして考えると、2つの標本の中央値に差がないとすれば、「大きい」と「小さい」となる確率は  $\frac{1}{2}$  となるはず
- 標本数を  $N = n_1 + n_2$  とする

## 符号検定（小標本：二項検定を利用）

- 標本数が少ない場合は、二項検定を利用して、正確な有意確率を求める

### 帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説  $H_1$  は「2組の標本の中央値に差がある」

### 検定統計量の算出

- 試行回数が  $n_1 + n_2$  の状況で、帰無仮説が成り立つとすれば「大きい」と「小さい」となる確率は  $\frac{1}{2}$  となるのを利用
- $n_1$  と  $n_2$  の小さい方の値  $m$  以下に対応する符号が出現する確率を求める

$$m = \min(n_1, n_2)$$

- 二項検定を利用して、次の式から「 $m$  回以下」起きる確率を算出する

$$P_0 = 2 \sum_{i=0}^m N C_i \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

## 仮説の判定

- 算出した有意確率 (P値) と有意水準を比較する
  - 片側検定
    - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $P_0 < \alpha$
    - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $P_0 \geq \alpha$
  - 両側検定
    - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $2P_0 < \alpha$
    - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $2P_0 \geq \alpha$

## 符号検定 (大標本: 標準正規分布を利用)

- 標本数が多い場合は、標準正規分布を利用して検定する

### 帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説  $H_1$  は「2組の標本の中央値に差がある」

### 検定統計量の算出

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量  $z_0$  を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

- 二項分布は離散型の分布であるため、標準正規分布のような連続型の分布に近似すると、その精度はあまりよくない
- そこで、Yatesの連続補正をすることで、精度をよくなる

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2| - 1}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

### 仮説の判定 (両側検定)

- 検定統計量  $z_0$  と、有意水準  $\alpha$  の有意点の値 (標準正規分布表などから求める) を使って、判定をする
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $|z_0| > z(\alpha/2)$ 
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $|z_0| < z(\alpha/2)$ 
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」



# ウィルコクソンの符号付順位検定

- 対応のある2つの標本について、それぞれのデータの対(各組)の差の順にもとづいて検定する
- 変数が順序尺度、もしくは、正規性があるか不明で間隔・比例尺度の場合に使うことができる

## 検定の対象

対応のある2組の標本(標本数は同じ)について考える。

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238

- 2つの標本のデータの各組を差  $d_i = A_i - B_i$  の絶対値を求める
  - 差が0の組は、この後の手続きから除外する
- それぞれの差の絶対値  $|d_i|$  に対応する組の数をもとに、差の絶対値の小さいほうから順位をつける
  - 同一順位の場合は、次のように扱う(平均順位)
    - 2位が2つある場合: 2位と3位の中間  $(2+3)/2=2.5$ 位を順位とする
    - 4位が3つある場合: 4位と5位と6位の中間  $(4+5+6)/3=5$ 位を順位とする
- 標本数  $n$  を、差が0でない組の数とする

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238
差 $d$	-4	17	18	0	-2	-1	-5	-1	14	19
順位	4	7	8		3	1.5	5	1.5	6	9

## ウィルコクソンの符号付順位検定

- データ対の順位がわかる場合は、符号検定よりも効率が良い

### 帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の代表値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説  $H_0$  は「2組の標本の代表値に差はない」
- 対立仮説  $H_1$  は「2組の標本の代表値に差がある」

### 検定統計量の算出

- 2つの標本の差  $d_i$  の順位のを、次のように求める
  - 差  $d_i$  が正の値の順位のを  $T_+$  とする
  - 差  $d_i$  が負の値の順位のを  $T_-$  とする
- $T_+$  と  $T_-$  の小さい方の値を  $T_0$  とする。
  - 標本数  $n$  は、差が0でない組の数とする

$$T_0 = \min(T_+, T_-)$$

- $n \leq 25$  (または  $n \leq 50$ ) の場合...
  - ウィルコクソンの符号付順位検定表から、標本数  $n$  に対応する  $T$  の値を求める
- $n > 25$  (または  $n > 50$ ) の場合...
  - 平均  $\mu_T$  と標準偏差  $\sigma_T$  を次の式から求める

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量  $z_0$  を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|T_0 - \mu_T|}{\sigma_T}$$

### 仮説の判定 (検定表からの算出)

---

- $n \leq 25$  (または  $n \leq 50$ ) の場合...
  - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $T_0 \geq T$ 
    - 「有意に差がある」 「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $T_0 < T$ 
    - 「有意に差はない」 「検定の結果、有意でない」 「差があるとはいえない」
- $n > 25$  (または  $n > 50$ ) の場合...
  - 検定統計量  $z_0$  と、有意水準  $\alpha$  の有意点の値 (標準正規分布表などから求める) を使って、判定をする
    - 帰無仮説  $H_0$  を棄却:  $|z_0| > z(\alpha/2)$ 
      - 「有意に差がある」 「検定の結果、有意である」
    - 帰無仮説  $H_0$  を採択:  $|z_0| < z(\alpha/2)$ 
      - 「有意に差はない」 「検定の結果、有意でない」 「差があるとはいえない」