健康統計学 第7回

今回は、確率・順列・組み合わせ（テキスト45〜52ページ）について学習します。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』縣 俊彦著（南江堂）

今回の内容

1. 確率
2. 順列と組み合わせ
3. Excelで順列と組み合わせを計算

確率

事象

- あることを実施して（**試行**）、それによって起こった結果を「**事象**」といい、事象 A を A と表す
  - 全体の事象のことを「**全事象**」といい、 Ω と表す
  - 決して起こらないことを「**空事象**」といい、 ϕ と表す
  - 事象 A または B が起こる確率を「**和事象**」といい、 $A \cup B$ と表す
  - 事象 A と B が同時に起こる確率を「**積事象**」といい、 $A \cap B$ と表す

確率 (Probability)

- 「確率」とは、あることが起こる結果の割合、つまり起こりやすさの目安である
  - ある事象 A が起こる確率を、 $\mathrm{P}(A)$ と表す
  - 確率は、0 から 1 の間の値をとる

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$$

    - 全事象の確率は $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ となる
    - 空事象の確率は $\mathrm{P}(\phi) = 0$ となる

数学的確率

- あることが起こる結果が何通りあるかを元にしてだす確率を、「**数学的確率**」という
- 例えば…
  - サイコロの目の出方は6通り
  - 3の目が出る確率は 1/6
- 事象Aの確率は、事象 A の起こる場合の数 a を、すべての場合の数（何通りあるかすべて数えたもの）N で割ったものである

$$\mathrm{P}(A) = \frac{a}{N}$$

統計的確率

- 実際に起こった結果を元にしてだす確率を、「**統計的確率**」という
- 例えば…
  - 実際にサイコロを60回投げたら、3の目が13回出た
  - この時点での、3の目が出た確率は 13/60
- 事象Aの確率は、事象Aの起こった回数 r を、すべての起こった回数 n で割ったものである

$$\mathrm{P}(A) = \frac{r}{n}$$

大数の法則

- 試行（あることを実施する）回数を増やせば増やすほど、統計的確率が数学的確率に近づいていくことを、「**大数の法則**」という
- 例えば…
  - 実際にサイコロを1,000回投げたら、3の目が160回出た
  - その結果、3の目が出た確率はほぼ 1/6

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r}{n} = \frac{a}{N}$$

加法定理

排反前提の場合

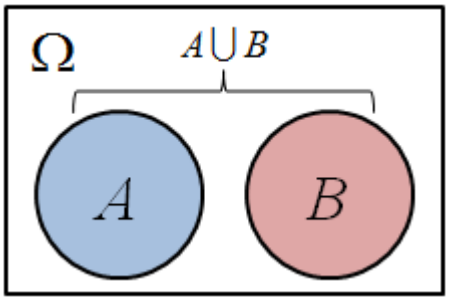
- 2つ、または2つ以上の**排反事象**（同時に起こりえない事象）が起こる確率は、それぞれの確率の和である

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C \cdots) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) + \cdots$$

  - 同時に起こりえない（2つ、または2つ以上の）事象を「**排反事象**」という

$$A \cup B = \phi$$



- 例：52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはダイヤを引く確率は、次のとおり

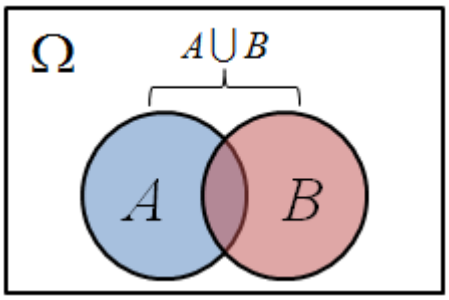
$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

一般の場合

- 2つ、または2つ以上の事象が起こる確率は、それぞれの確率の和から、それぞれの事象が同時に起こる確率を引いたもの

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$



- 例：52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはA（エース）を引く確率は、次のとおり

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{4}{13}$$

乗法定理

条件つき確率

- 「A が起こったときに B が起きる」事象を、$B|A$ と表す
- 「A が起こったときに B が起きる」事象の確率、つまり、A が起こったという条件のもとで B が起きる確率を、「**条件つき確率**」といい、$\mathrm{P}(B|A)$ と表す

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

- 上の式の両辺に $\mathrm{P}(A)$ を掛けると、次のように式が変形できる

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)$$

  - B が A に関係なく起きる（事象 A と B が独立な事象である）場合、「乗法定理」が導き出せる

- 例：サイコロを投げて、奇数の目が出たとき（事象 A ）に、それが1の目である（事象 B ）確率は、次のとおり

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

  - A = 奇数の目が出る = {1, 3 ,5}
  - B = 1の目が出る = {1}

- 例：ある男女100人について結婚しているかどうか調査した結果が、次のようになった。この100人から1人を選んだとき、それが結婚している男性である確率は？

	男性	女性	合計
結婚している	26	21	47
結婚していない	29	24	53
合計	55	45	100

  - A = 選んだ人が男性である = 55人
  - $A \cap B$ = 結婚している男性である = 26人

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{26}{55}\end{aligned}$$

乗法定理

- 2つ、または2つ以上の互いに独立な事象が同時に（または続けて）起こる確率は、確率の積になる

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C \cdots) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(C) \times \cdots$$

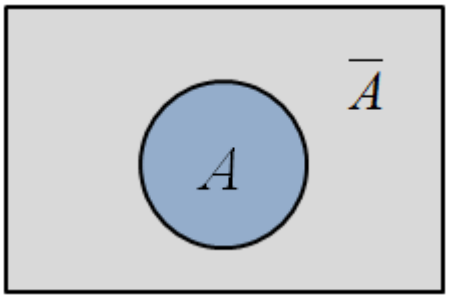
- 「**独立事象**」とは、ある事象の発生する確率が、他のいずれの事象の影響も受けない（他の事象に関係なく発生する事象）
- 例：サイコロを2回投げて、2回とも1の目が出る確率（1の目が出た後、1の目が出る確率）は、次のとおり

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{36}$$

余事象

- ある事象Aについて、その事象がおこらないすべての場合（の事象）を「**余事象**」 $\overline{A}$ と表す
- 余事象が起こる確率を $\mathrm{P}(\overline{A})$ と表す

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$$



- 例：サイコロを2回投げたとき、「**少なくとも**」1回は3の目が出る確率は、次のとおり
  a. 「少なくとも～」の場合は、余事象の確率を考える
  b. サイコロを1回投げて、3の目が全く出ない確率は 5/6
  c. 2回目も3の目が出ない確率は、次のようになる

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

  d. サイコロを2回目投げて何かが出る確率（=1）から、2回とも3の目が出ない確率をひけば、少なくとも1回は3の目が出る確率になる

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

順列と組み合わせ

階乗（factorial）

- ある数 n から1ずつ少ない数を掛けあわせることを「**階乗**」という

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

- なお、0（ゼロ）の階乗は、便宜上、1である。

順列 (Permutation)

- 異なる n 個のものから r 個を選んだ「**並べ方**」を、n 個から r 個をとる「**順列**」という

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

- n 個から n 個をとる順列

$${}_n\mathrm{P}_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

- 7 個から 3 個をとる順列

$${}_7\mathrm{P}_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

- また次のようなことがいえる（n 個から0個をとる順列）

$${}_n\mathrm{P}_0 = 0$$

組み合わせ (Combination)

- 異なる n 個のものから r 個を選ぶときの組み合わせを、n 個から r 個をとる「**組み合わせ**」という

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r &= \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

- 4 個から 3 個をとる組み合わせ

$${}_4\mathrm{C}_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$$

- なぜ ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{P}_r / r!$ となるか？
  - {a, b, c, d, e} の5つから {a, b, c} の3つを選ぶ場合を考えると…
    - 順列は次の 3!=6 通りとなる
      {a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}
    - 組み合わせでは順序を考えないので、順列の結果を選び出した3つの場合の数 3!=6 で割ってやればよい
- また次のようなことがいえる

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_0 &= 1 \\
{}_n\mathrm{C}_1 &= n \\
{}_n\mathrm{C}_n &= 1 \\
{}_n\mathrm{C}_r &= {}_n\mathrm{C}_{n-r}
\end{aligned}
$$

Excelで順列と組み合わせを計算

階乗

- 数値の階乗を計算するには、**FACT**関数を利用します。

FACT (数値の階乗の値を返す)

- 書式 : FACT(数値)
- 引数 : 数値 … :階乗を求める正の整数 (小数点以下がある数値を指定すると小数点以下が切り捨て)
- 例:10の階乗を計算する

```
=FACT(10)
```

順列

- 順列 (異なる n 個のものから r 個を選んだ並べ方) を求めるには、**PERMUT**関数を利用します。

PERMUT (順列の値を返す)

- 書式 : PERMUT(総数, 抜き取り数)
- 引数 : 総数 … :選びとる対象となる全体の数
- 引数 : 抜き取り数 … :選びとる数
- 例:8個のものから3個を取る順列の値を計算する

```
=PERMUT(8, 3)
```

組み合わせ

- 組み合わせ (異なる n 個のものから r 個を選ぶときの組み合わせ) を求めるには、**COMBIN**関数を利用します。

COMBIN (組み合わせの値を返す)

- 書式 : COMBIN(総数, 抜き取り数)
- 引数 : 総数 … :抜き取る対象となる全体の数
- 引数 : 抜き取り数 … :抜き取る組み合わせ 1 組に含まれる項目の数
- 例:8個のものから3個を選ぶときの組み合わせの値を計算する

```
=COMBIN(8, 3)
```