

健康統計学 第15回

今回は、ノンパラメトリックな手法の仮説検定（107～116ページ）について学習します。また、授業全体についてのまとめをします。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』 縣 俊彦著 (南江堂)

今回の内容

1. [適合度の検定](#)
2. [独立性の検定](#)
3. [追加:対応のある2標本の比率の差の検定](#) (マクネマー検定)
4. [対応のある2標本の比較\(1\)](#) (符号検定)
5. [対応のある2標本の比較\(2\)](#) (ウィルコクソンの符号付順位検定)

◦ クラスカル・ウォリス検定は授業では取り上げません

6. 授業のまとめ

- 期末試験について説明
- 授業改善アンケートの実施

適合度の検定

- 観測値が、期待値(理論値)や、母集団の統計値(母数)に一致(適合)するかどうかを検定する。
- 変数は名義尺度になる(データは度数)。

観測値と期待値

- ある事象が実際に観測された度数(データの数)を「**観測値**」という
 - 「**観測度数**」ともいう
- ある事象の理論上の度数(データの数)を「**期待値**」(理論値)という
 - 「**期待度数**」ともいう

	A_1	A_2	...	A_k	計
観測値(観測度数)	n_1	n_2	...	n_k	n
期待値(期待度数)	e_1	e_2	...	e_k	n

適合度の検定(1標本カイ2乗検定)

帰無仮説と対立仮説

観測値と期待値が一致するかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「観測値と期待値は一致する」
- 対立仮説 H_1 は「観測値と期待値は一致しない」

検定統計量の算出

- 自由度 $n-1$ のカイ2乗(χ^2)分布にしたがう、検定統計量 χ_0^2 を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

仮説の判定(両側検定)

- 検定統計量 χ_0^2 と、自由度 $df = n-1$ 、有意水準 α の有意点の値(カイ2乗分布表などから求める)を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $|\chi_0^2| > \chi^2$
 - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $|\chi_0^2| < \chi^2$
 - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

独立性の検定

- 2つの変数に関連性があるか、つまり2つの変数の独立性を検定する。
- アンケートの結果の分析などに利用できる、基本的な手法のひとつ。

分割表（クロス表）

分割表とは

- 観測された2つの変数(要因と結果など)を組み合わせた表を、「**分割表(クロス表)**」という
 - クロス集計表ともいう
 - Excelでは「ピボットテーブル」の機能で作ることができる
- k 行 l 列の表からなる分割表を、「 **$k \times l$ 分割表**」という

	B_1	B_2	...	B_l	計
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
A_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	...	$n_{\cdot l}$	n

- なお、周辺分布(右端の列や最下行の値)は、次のような意味になる。
 - 標本数: $n_{\cdot j}$
 - 第 i 行の標本数: $n_{i\cdot}$
 - 第 j 列の標本数: $n_{\cdot j}$

$$\begin{aligned}n_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^l n_{ij} \\n_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^k n_{ij} \\n &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij}\end{aligned}$$

期待度数

- 分割表の各セルの期待値は、周辺分布の値から、次のように計算する。
 - i 行 j 列のセルの期待値: e_{ij}

$$\begin{aligned}e_{ij} &= n \times \frac{n_{i\cdot}}{n} \times \frac{n_{\cdot j}}{n} \\&= \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}\end{aligned}$$

独立性の検定（2×2より大きい表の場合：自由度 $df > 1$ ）

- 2行2列より大きい分割表の場合は、カイ二乗 (χ^2) 分布を利用して検定する

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説 H_1 は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

検定統計量の算出

- 自由度 $(k-1) \times (l-1)$ のカイ二乗 (χ^2) 分布にしたがう、検定統計量 χ_0^2 を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 χ_0^2 と、自由度 $df = (k-1) \times (l-1)$ 、有意水準 α の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却： $|\chi_0^2| > \chi^2$
 - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択： $|\chi_0^2| < \chi^2$
 - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

独立性の検定（2×2表の場合：自由度 $df=1$ ）

- 2行2列の分割表の場合は、直接確率を計算するか、カイ二乗 (χ^2) 分布に近似した検定統計量で検定する
 - フィッシャー(Fisher)の直接確率法
 - 標本数が20未満、または標本数が40未満で最小期待値が5未満の場合
 - イエーツ(Yates)の連続補正
 - 標本数が40未満で、フィッシャーの直接確率法の条件を満たさない場合
- ここでは、Yatesの連続補正について説明する

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説 H_1 は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

2×2分割表

- 観測値による分割表を、次のようにあらわす

	要因1	要因2	計
結果A	a	b	a+b
結果B	c	d	c+d
計	a+c	b+d	a+b+c+d = n

- 期待値による分割表は、次のような表になる

	要因1	要因2	計
結果A	$(a+b) \times \frac{a+c}{n}$	$(a+b) \times \frac{b+d}{n}$	$a+b$
結果B	$(c+d) \times \frac{a+c}{n}$	$(c+d) \times \frac{b+d}{n}$	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d = n$

検定統計量の算出

- 2×2 分割表では、次の式のような簡便な方法から、自由度 $(2-1) \times (2-1) = 1$ のカイ二乗 (χ^2) 分布にしたがう、検定統計量 χ_0^2 を次の式から算出できる

$$\chi_0^2 = \frac{(ad-bc)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

- しかし、この方法では、計算した値が実際の χ^2 分布とずれてしまうことがわかっている
 - 理由は、 χ^2 分布は連続的にもかわらず、計算した検定統計量は離散的だから
- そこで、Yatesの連続補正を使って補正した、検定統計量 χ_{0c}^2 を用いる
 - 原則として、 2×2 分割表ではYatesの連続補正を使うと考えてよい

$$\chi_{0c}^2 = \frac{(|ad-bc| - \frac{n}{2})^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 χ_{0c}^2 と、自由度 $df = (2-1) \times (2-1) = 1$ 、有意水準 α の有意点の値(カイ二乗分布表などから求める)を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $|\chi_{0c}^2| > \chi^2$
 - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $|\chi_{0c}^2| < \chi^2$
 - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

対応のある2標本の比率の差の検定

- 対応のある2組の標本の比率の差を検定する。
- 教育や実験の前後で、被験者の「はい」「いいえ」などの回答が、どのように変化したかの比率を検定する

検定の対象

対応のある2つの標本について考える。データをまとめると、次のような表になる。

		教育後		計
		はい	いいえ	
教育前	はい	a	b	$a+b$
	いいえ	c	d	$c+d$
	計	$a+c$	$b+d$	n

マクネマー（McNemar）検定

- カイ二乗 (χ^2) 分布を利用して検定する
- 回答が変化した個所（「はい」→「いいえ」、「いいえ」→「はい」）に着目する
 - 期待度数として、 b と c の2か所の平均 $\frac{b+c}{2}$ を考えて検定をする

帰無仮説と対立仮説

対応のある2つの標本の比率について調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの標本の比率に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2つの標本の比率に差がある」

検定統計量の算出

- $\frac{b+c}{2} > 5$ の場合...
 - 自由度1のカイ二乗 (χ^2) 分布にしたがう、検定統計量 χ_0^2 を次の式から算出する

$$\chi_0^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c}$$

- Yatesの連続補正を使う場合は、次の式から検定統計量を算出する

$$\chi_0^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}$$

- $\frac{b+c}{2} \leq 5$ の場合は、二項検定を利用して有意確率を求めるか、Yatesの連続補正を使う

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 χ_0^2 と、自由度1、有意水準 α の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却： $|\chi_0^2| > \chi^2$
 - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択： $|\chi_0^2| < \chi^2$
 - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

符号検定

- 中央値の差を検定する手法である
- 対応のある2つの標本(調査前と調査後、教育前と教育後など)について、それぞれのデータの対(各組)の大小(または優劣)関係にもとづいて検定する

検定の対象

対応のある2組の標本(標本数は同じ)について考える。

- 例えば、ある教育の前と後の効果、実験の前と後の結果の違いなどを調べる

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2

- 2つの標本のデータの各組を比較する
 - 「大きい(または、優れている)」となった組の数を n_1 とする
 - 「小さい(または、劣っている)」となった組の数を n_2 とする
 - 同じになった組は、検定から除外する

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2
A-B	+	-	+	-	0	...	+	+

- 試行回数が $n_1 + n_2$ と見なして考えると、2つの標本の中央値に差がないとすれば、「大きい」と「小さい」となる確率は $\frac{1}{2}$ となるはず
- 標本数を $N = n_1 + n_2$ とする

符号検定(小標本:二項検定を利用)

- 標本数が少ない場合は、二項検定を利用して、正確な有意確率を求める

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の中央値に差がある」

検定統計量の算出

- 試行回数が $n_1 + n_2$ の状況で、帰無仮説が成り立つとすれば「大きい」と「小さい」となる確率は $\frac{1}{2}$ となるのを利用
- n_1 と n_2 の小さい方の値 m 以下に対応する符号が出現する確率を求める

$$m = \min(n_1, n_2)$$

- 二項検定を利用して、次の式から「 m 回以下」起きる確率を算出する

$$P_0 = 2 \sum_{i=0}^m N C_i \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

仮説の判定

- 算出した有意確率 (P値) と有意水準を比較する
 - 片側検定
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $P_0 < \alpha$
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $P_0 \geq \alpha$
 - 両側検定
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $2P_0 < \alpha$
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $2P_0 \geq \alpha$

符号検定 (大標本: 標準正規分布を利用)

- 標本数が多い場合は、標準正規分布を利用して検定する

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の中央値に差がある」

検定統計量の算出

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

- 二項分布は離散型の分布であるため、標準正規分布のような連続型の分布に近似すると、その精度はあまりよくない
- そこで、Yatesの連続補正をすることで、精度をよくする

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2| - 1}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

仮説の判定 (両側検定)

- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値 (標準正規分布表などから求める) を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $|z_0| > z(\alpha/2)$
 - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $|z_0| < z(\alpha/2)$
 - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

ウィルコクソンの符号付順位検定

- 対応のある2つの標本について、それぞれのデータの対(各組)の差の順にもとづいて検定する
- 変数が順序尺度、もしくは、正規性があるか不明で間隔・比例尺度の場合に使うことができる

検定の対象

対応のある2組の標本(標本数は同じ)について考える。

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238

- 2つの標本のデータの各組を差 $d_i = A_i - B_i$ の絶対値を求める
 - 差が0の組は、この後の手続きから除外する
- それぞれの差の絶対値 $|d_i|$ に対応する組の数をもとに、差の絶対値の小さいほうから順位をつける
 - 同一順位の場合は、次のように扱う(平均順位)
 - 2位が2つある場合: 2位と3位の中間 $(2+3)/2=2.5$ 位を順位とする
 - 4位が3つある場合: 4位と5位と6位の中間 $(4+5+6)/3=5$ 位を順位とする
- 標本数 n を、差が0でない組の数とする

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238
差 d	-4	17	18	0	-2	-1	-5	-1	14	19
順位	4	7	8		3	1.5	5	1.5	6	9

ウィルコクソンの符号付順位検定

- データ対の順位がわかる場合は、符号検定よりも効率が良い

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の代表値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の代表値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の代表値に差がある」

検定統計量の算出

- 2つの標本の差 d_i の順位の和を、次のように求める
 - 差 d_i が正の値の順位の和を T_+ とする
 - 差 d_i が負の値の順位の和を T_- とする
- T_+ と T_- の小さい方の値を T_0 とする。
 - 標本数 n は、差が0でない組の数とする

$$T_0 = \min(T_+, T_-)$$

- $n \leq 25$ (または $n \leq 50$) の場合...
 - ウィルコクソンの符号付順位検定表から、標本数 n に対応する T の値を求める
- $n > 25$ (または $n > 50$) の場合...
 - 平均 μ_T と標準偏差 σ_T を次の式から求める

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|T_0 - \mu_T|}{\sigma_T}$$

仮説の判定 (検定表からの算出)

- $n \leq 25$ (または $n \leq 50$) の場合...
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $T_0 \geq T$
 - 「有意に差がある」 「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $T_0 < T$
 - 「有意に差はない」 「検定の結果、有意でない」 「差があるとはいえない」
- $n > 25$ (または $n > 50$) の場合...
 - 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値 (標準正規分布表などから求める) を使って、判定をする
 - 帰無仮説 H_0 を棄却: $|z_0| > z(\alpha/2)$
 - 「有意に差がある」 「検定の結果、有意である」
 - 帰無仮説 H_0 を採択: $|z_0| < z(\alpha/2)$
 - 「有意に差はない」 「検定の結果、有意でない」 「差があるとはいえない」