

健康統計学 第5回

今回は、確率・順列・組み合わせ（テキスト45～52ページ）について学習します。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第4版』 縣 俊彦著 (南江堂)

次回の連絡

- 次回は、ここまでのまとめとして、表計算ソフトを使った、記述統計の処理をします。
 - 代表値、散布度、相関、回帰
- 中間試験は第7回に変更します。自己採点も同時に行います。

今回の内容

1. [確率](#)
2. [順列と組み合わせ](#)
3. [Excelで順列と組み合わせを計算](#)

確率

事象

- あることが起こった結果を、「**事象**」といい、事象 A を A と表す
 - 全体の事象のことを「**全事象**」といい、 Ω と表す
 - 決して起こらないことを「**空事象**」といい、 ϕ と表す
 - 事象 A または B が起こる確率を「**和事象**」といい、 $A \cup B$ と表す
 - 事象 A と B が同時に起こる確率を「**積事象**」といい、 $A \cap B$ と表す

確率 (Probability)

- 「確率」とは、あることが起こる結果の割合、つまり起こりやすさの目安である
 - ある事象 A が起こる確率を、 $P(A)$ と表す
 - 確率は、0 から 1 の間の値をとる

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- 全事象の確率は $P(\Omega) = 1$ となる
- 空事象の確率は $P(\phi) = 0$ となる

数学的確率

- あることが起こる結果が何通りあるかを元にしてだす確率を、「**数学的確率**」という
- 例えば...
 - サイコロの目の出方は6通り
 - 3の目が出る確率は $1/6$
- 事象 A の確率は、事象 A の起こる場合の数 a を、すべての場合の数 (何通りあるかすべて数えたもの) N で割ったものである

$$P(A) = \frac{a}{N}$$

統計的確率

- 実際に起こった結果を元にしてだす確率を、「**統計的確率**」という
- 例えば...
 - 実際にサイコロを60回投げたら、3の目が13回出た
 - この時点での、3の目が出た確率は $13/60$
- 事象 A の確率は、事象 A の起こった回数 r を、すべての起こった回数 n で割ったものである

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

大数の法則

- **試行** (あることを実施する) 回数を増やせば増やすほど、統計的確率が数学的確率に近づいていくことを、「**大数の法則**」という
- 例えば...
 - 実際にサイコロを1,000回投げたら、3の目が1,300回出た
 - その結果、3の目が出た確率はほぼ $1/3$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = \frac{a}{N}$$

加法定理

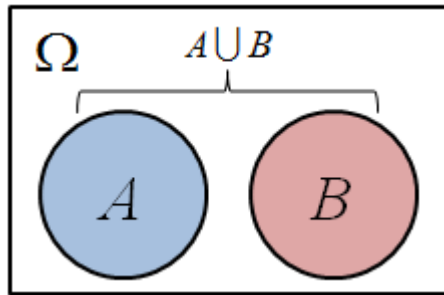
排反前提の場合

- 2つ、または2つ以上の**排反事象**(同時に起こりえない事象)が起こる確率は、それぞれの確率の和である

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\P(A \cup B \cup C \cdots) &= P(A) + P(B) + P(C) + \cdots\end{aligned}$$

- 同時に起こりえない(2つ、または2つ以上の)事象を「**排反事象**」という

$$A \cup B = \phi$$



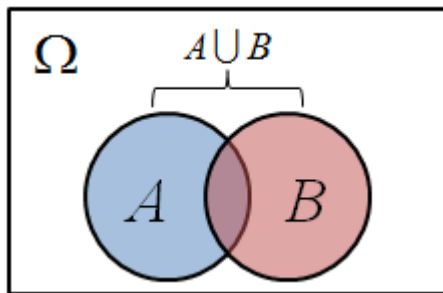
- 例: 52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはダイヤを引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \\&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

一般の場合

- 2つ、または2つ以上の事象が起こる確率は、それぞれの確率の和から、それぞれの事象が同時に起こる確率を引いたもの

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- 例: 52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはA(エース)を引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} \\&= \frac{4}{13}\end{aligned}$$

乗法定理

条件つき確率

- 「A が起こったときに B が起きる」事象を、 $B|A$ と表す

- 「A が起こったときに B が起きる」事象の確率、つまり、A が起こったという条件のもとで B が起きる確率を、「**条件つき確率**」といい、 $P(B|A)$ と表す

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 上の式の両辺に $P(A)$ を掛けると、次のように式が変形できる

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A)$$

◦ B が A に関係なく起きる(事象 A と B が独立な事象である)場合、「乗法定理」が導き出せる

- 例: サイコロを投げて、奇数の目が出たとき(事象 A)に、それが1の目である(事象 B)確率は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

◦ A = 奇数の目が出る = {1, 3, 5}

◦ B = 1の目が出る = {1}

- 例: ある男女100人について結婚しているかどうか調査した結果が、次のようになった。この100人から1人を選んだとき、それが結婚している男性である確率は？

	男性	女性	合計
結婚している	26	21	47
結婚していない	29	24	53
合計	55	45	100

◦ A = 選んだ人が男性である = 55人

◦ $A \cap B$ = 結婚している男性である = 26人

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{26}{55} \end{aligned}$$

乗法定理

- 2つ、または2つ以上の互いに独立な事象が同時に(または続けて)起こる確率は、確率の積になる

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ P(A \cap B \cap C \dots) &= P(A) \times P(B) \times P(C) \times \dots \end{aligned}$$

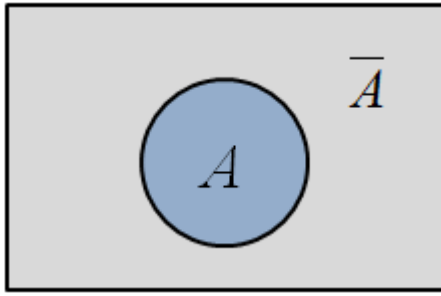
- 「**独立事象**」とは、ある事象の発生する確率が、他のいずれの事象の影響も受けない(他の事象に関係なく発生する事象)
- 例: サイコロを2回投げて、2回とも1の目が出る確率(1の目が出た後、1の目が出る確率)は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

余事象

- ある事象Aについて、その事象がおこらないすべての場合(の事象)を「**余事象**」 $\bar{A}$ と表す
- 余事象が起こる確率を $P(\bar{A})$ と表す

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



- 例: サイコロを2回投げたとき、「**少なくとも**」1回は3の目が出る確率は、次のとおり

- 「少なくとも～」の場合は、余事象の確率を考える
- サイコロを1回投げて、3の目が全く出ない確率は $5/6$
- 2回目も3の目が出ない確率は、次のようになる

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

- サイコロを2回目投げて何かが出る確率 (=1) から、2回とも3の目が出ない確率をひけば、少なくとも1回は3の目が出る確率になる

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

順列と組み合わせ

階乗 (factorial)

- ある数 n から1ずつ少ない数を掛けあわせることを「**階乗**」という

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

- なお、0 (ゼロ) の階乗は、便宜上、1である。

順列 (Permutation)

- 異なる n 個のもののから r 個を選んだ「**並べ方**」を、 n 個から r 個をとる「**順列**」という

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

- n 個から n 個をとる順列

$${}_n P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

- 7 個から 3 個をとる順列

$${}_7 P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

- また次のようなことがいえる (n 個から0個をとる順列)

$${}_n P_0 = 1$$

組み合わせ (Combination)

- 異なる n 個のもののから r 個を選ぶときの組み合わせを、 n 個から r 個をとる「**組み合わせ**」という

$$\begin{aligned} {}_n C_r &= \frac{{}_n P_r}{r!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

- 4 個から 3 個をとる組み合わせ

$${}_4 C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$$

- なぜ ${}_n C_r = {}_n P_r / r!$ となるか？

◦ $\{a, b, c, d, e\}$ の5つから $\{a, b, c\}$ の3つを選ぶ場合を考えると...

- 順列は次の $3! = 6$ 通りとなる

$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$

- 組み合わせでは順序を考えないので、順列の結果を $3! = 6$ で割ってやればよい

- また次のようなことがいえる

$$\begin{aligned}
{}_nC_0 &= 1 \\
{}_nC_1 &= n \\
{}_nC_n &= 1 \\
{}_nC_r &= {}_nC_{n-r}
\end{aligned}$$