

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が未知で等しくない）

検定の対象

対応のない（独立した）2つの母集団について考える。それぞれの母数は次のとおり。ただし、母分散の値はわからない。

	母集団1	母集団2
母平均	μ_1	μ_2
標本の標本数	n_1	n_2
標本平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
標本分散	s_1^2	s_2^2

なお、標本平均は不偏分散から求める。

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

等分散の検定（F検定）

等分散の検定の結果、 $F_0 \geq F'$ ならば、母分散は未知で「等しくない」場合に、この検定を使う

Welchの検定

- 標本数の和が $n_1 + n_2 > 100$ の場合にも使われることがある
- 2組の母集団の分散が2倍以上違う場合や、標本数が2倍上違う場合に使われることがあり、やや特殊な検定法である

帰無仮説と対立仮説

対応のない（独立した）2組の母集団の平均に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の母集団の平均に差はない」: $\mu_1 = \mu_2$
- 対立仮説 H_1 は「2組の母集団の平均に差がある」: $\mu_1 \neq \mu_2$

検定統計量の算出

- t分布にしたがう、検定統計量 t_0 を次の式から算出する

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

- なお、自由度は次のように算出する（整数にならない場合は、小数点以下を切り捨て）

$$df = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2 \div \left\{ \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1} \right\}$$

- 自由度の計算が複雑なので、あまりおススメの方法とはいえない...

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 t_0 と、自由度 df 、有意水準 α の有意点の値 (t 分布表などから求める) を使って、判定をする

○ 帰無仮説 H_0 を棄却: $|t_0| > t_{(\alpha/2)}(df)$

- 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「平均に差がある」

○ 帰無仮説 H_0 を採択: $|t_0| < t_{(\alpha/2)}(df)$

- 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「平均に差があるとはいえない」

例題

- 女子大学生にデートに臨むときのハイヒールの高さを聞いたところ、自分を「おしゃれ」と答えた24人のハイヒールの高さの平均は3.67cm、標準偏差は1.79cmであった。また、自分を「普通」と答えた48人のハイヒールの高さの平均は2.77cm、標準偏差は1.29cmであった。「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差はあるか？

考え方

自分を「おしゃれ」と答えた女子大生と自分を「普通」と答えた女子大生のハイヒールの高さについて、答えた人数やハイヒールの高さの平均と標準偏差についてまとめると、次の表ようになる。

	「おしゃれ」と答えた女子大生	「普通」と答えた女子大生
標本数	$n_1 = 24$	$n_2 = 48$
標本平均	$\bar{x}_1 = 3.67$	$\bar{x}_2 = 2.77$
標本分散	$s_1^2 = 1.79^2$	$s_2^2 = 1.29^2$

まず、母分散が等しいかどうかを調べるため、等分散の検定をする。F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量は、次のようになる。

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1.79^2}{1.29^2} \\ &= 1.92542 \dots \simeq 1.925 \end{aligned}$$

この値を、第1自由度が $24 - 1 = 23$ 、第2自由度が $48 - 1 = 47$ 、有意水準 $\alpha = 0.05$ の F 値を分布表から調べると、 $F' = 1.761$ となる。検定統計量と比較すると、 $F_0 > F'$ となり、2組の標本の母分散は等分散ではないと判断できるので、Welchの検定を用いる。

t 分布にしたがう検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \\ &= \frac{3.67 - 2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24} + \frac{1.29^2}{48}}} \\ &= \frac{3.67 - 2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24} + \frac{1.29^2}{48}}} \\ &= 2.82552 \simeq 2.826 \end{aligned}$$

次に、検定のための自由度を求める。

$$\begin{aligned}
 df &= \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2 \div \left\{ \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1} \right\} \\
 &= \left(\frac{1.79^2}{24} + \frac{1.29^2}{48} \right)^2 \div \left\{ \frac{\left(\frac{1.79^2}{24} \right)^2}{24 - 1} + \frac{\left(\frac{1.29^2}{48} \right)^2}{48 - 1} \right\} \\
 &= 40.019
 \end{aligned}$$

整数分だけを自由度として採用すると、 $df = 40$ となる。

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha = 0.05$ では、自由度 $df = 40$ のt値を分布表から調べると、 $|t_0| > t_{(\alpha/2)}(40) = 2.021$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差がある。**

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ では、 $|t_0| > t_{(\alpha/2)}(40) = 2.704$ となり、やはり帰無仮説は棄却される。