健康統計学 第15回

今回は、ノンパラメトリックな手法の仮説検定（107〜116ページ）について学習します。また、授業全体についてのまとめをします。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』縣 俊彦著 (南江堂)

今回の内容

1. 適合度の検定
2. 独立性の検定
3. 追加：対応のある2標本の比率の差の検定 (マクネマー検定)
4. 対応のある2標本の比較(1) (符号検定)
5. 対応のある2標本の比較(2) (ウィルコクソンの符号付順位検定)
    - クラスカル・ウォリス検定は授業では取り上げません
6. 授業のまとめ
    - 期末試験について説明
    - 授業改善アンケートの実施

適合度の検定

- 観測値が、期待値 (理論値) や、母集団の統計値 (母数) に一致 (適合) するかどうかを検定する。
- 変数は名義尺度になる (データは度数) 。

観測値と期待値

- ある事象が実際に観測された度数 (データの数) を「**観測値**」という
  - 「**観測度数**」ともいう
- ある事象の理論上の度数 (データの数) を「**期待値**」 (理論値) という
  - 「**期待度数**」ともいう

	A_1	A_2	...	A_k	計
観測値(観測度数)	n_1	n_2	...	n_k	n
期待値(期待度数)	e_1	e_2	...	e_k	n

適合度の検定(1標本カイ2乗検定)

帰無仮説と対立仮説

観測値と期待値が一致するかどうかをどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「観測値と期待値は一致する」
- 対立仮説 H_1 は「観測値と期待値は一致しない」

検定統計量の算出

- 自由度 $n-1$ のカイ二乗 (χ^2) 分布にしたがう、検定統計量 ${\chi_0}^2$ を次の式から算出する

$$ {\chi_0}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} $$

仮説の判定(両側検定)

- 検定統計量 ${\chi_0}^2$ と、自由度 $df = n-1$ 、有意水準 α の有意点の値 (カイ二乗分布表などから求める) を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却 : $|{\chi_0}^2| > \chi^2$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択 : $|{\chi_0}^2| < \chi^2$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

独立性の検定

- 2つの変数に関連性があるか、つまり2つの変数の独立性を検定する。
- アンケートの結果の分析などに利用できる、基本的な手法のひとつ。

分割表（クロス表）

分割表とは

- 観測された2つの変数（要因と結果など）を組み合わせた表を、「**分割表（クロス表）**」という
  - クロス集計表ともいう
  - Excelでは「ピボットテーブル」の機能で作ることができる
- *k*行*l*列の表からなる分割表を、「***k* × *l* 分割表**」という

	B_1	B_2	…	B_l	計
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
…	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_k	n_{k1}	n_{k2}	$\cdots$	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot l}$	n

- なお、周辺分布（右端の列や最下行の値）は、次のような意味になる。
  - 標本数：$n_{\cdot l}$
  - 第 *i* 行の標本数：$n_{i\cdot}$ ：
  - 第 *j* 行の標本数：$n_{\cdot j}$ ：

$$
\begin{aligned}
n_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{l} n_{ij} \\
n_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{k} n_{ij} \\
n &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}
\end{aligned}
$$

期待度数

- 分割表の各セルの期待値は、周辺分布の値から、次のように計算する。
  - *i* 行 *j* 列のセルの期待値：e_{ij}

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= n \times \frac{n_{i\cdot}}{n} \times \frac{n_{\cdot j}}{n} \\
&= \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}
\end{aligned}
$$

独立性の検定（2×2より大きい表の場合：自由度 *df* >1）

- 2行2列より大きい分割表の場合は、カイ二乗（χ^2）分布を利用して検定する

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説 H_1 は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

検定統計量の算出

- 自由度 $(k-1)\times(l-1)$ のカイ二乗（χ^2）分布にしたがう、検定統計量 $\chi_0{}^2$ を次の式から算出する

$$\chi_0{}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 $\chi_0{}^2$ と、自由度 $df=(k-1)\times(l-1)$、有意水準 α の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|\chi_0{}^2|>\chi^2$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|\chi_0{}^2|<\chi^2$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

独立性の検定（2×2表の場合：自由度 *df* =1）

- 2行2列の分割表の場合は、直接確率を計算するか、カイ二乗（χ^2）分布に近似した検定統計量で検定する
  - フィッシャー(Fisher)の直接確率法
    - 標本数が20未満、または標本数が40未満で最小期待値が5未満の場合
  - イェーツ(Yates)の連続補正
    - 標本数が40未満で、フィッシャーの直接確率法の条件を満たさない場合
- ここでは、Yatesの連続補正について説明する

帰無仮説と対立仮説

2つの変数が独立であるか（関連がないか）を調べるを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの変数は独立である（関連がない）」
- 対立仮説 H_1 は「2つの変数は独立ではない（関連がある）」

2×2分割表

- 観測値による分割表を、次のようにあらわす

	要因1	要因2	計
結果A	a	b	$a+b$
結果B	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

- 期待値による分割表は、次のような表になる

	要因1	要因2	計
結果A	$(a+b)\times\frac{a+c}{n}$	$(a+b)\times\frac{b+d}{n}$	$a+b$
結果B	$(c+d)\times\frac{a+c}{n}$	$(c+d)\times\frac{b+d}{n}$	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d=n$

検定統計量の算出

- 2×2分割表では、次の式のような簡便な方法から、自由度 $(2-1)\times(2-1)=1$ のカイ二乗（χ^2）分布にしたがう、検定統計量 $\chi_0{}^2$ を次の式から算出できる

$$\chi_0{}^2=\frac{(ad-bc)^2n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

- しかし、この方法では、計算した値が実際の χ^2 分布とずれてしまうことがわかっている
  - 理由は、 χ^2 分布は連続的にもかかわらず、計算した検定統計量は離散的だから
- そこで、Yatesの連続補正を使って補正した、検定統計量 $\chi_{0c}{}^2$ を用いる
  - 原則として、2×2分割表ではYatesの連続補正を使うと考えてよい

$$\chi_{0c}{}^2=\frac{\left(|ad-bc|-\frac{n}{2}\right)^2n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 $\chi_{0c}{}^2$ と、自由度 $df=(2-1)\times(2-1)=1$ 、有意水準 α の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|\chi_{0c}{}^2|>\chi^2$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|\chi_{0c}{}^2|<\chi^2$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

対応のある2標本の比率の差の検定

- 対応のある2組の標本の比率の差を検定する。
- 教育や実験の前後で、被験者の「はい」「いいえ」などの回答が、どのように変化したかの比率を検定する

検定の対象

対応のある2つの標本について考える。データをまとめると、次のような表になる。

		教育後		計
		はい	いいえ	
教育前	はい	a	b	$a+b$
	いいえ	c	d	$c+d$
	計	$a+c$	$b+d$	n

マクネマー（McNemar）検定

- カイ二乗（χ^2）分布を利用して検定する
- 回答が変化した個所（「はい」→「いいえ」、「いいえ」→「はい」）に着目する
  - 期待度数として、bとcの2か所の平均 $\frac{b+c}{2}$ を考えて検定をする

帰無仮説と対立仮説

対応のある2つの標本の比率について調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2つの標本の比率に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2つの標本の比率に差がある」

検定統計量の算出

- $\frac{b+c}{2}>5$ の場合…
  - 自由度1のカイ二乗（χ^2）分布にしたがう、検定統計量 ${\chi_0}^2$ を次の式から算出する

$$ {\chi_0}^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c} $$

  - Yatesの連続補正を使う場合は、次の式から検定統計量を算出する

$$ {\chi_0}^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c} $$

- $\frac{b+c}{2}\leq 5$ の場合は、二項検定を利用して有意確率を求めるか、Yatesの連続補正を使う

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 ${\chi_0}^2$ と、自由度1、有意水準 α の有意点の値（カイ二乗分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|{\chi_0}^2|>\chi^2$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|{\chi_0}^2|<\chi^2$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

符号検定

- 中央値の差を検定する手法である
- 対応のある2つの標本（調査前と調査後、教育前と教育後など）について、それぞれのデータの対（各組）の大小（または優劣）関係にもとづいて検定する

検定の対象

対応のある2組の標本（標本数は同じ）について考える。

- 例えば、ある教育の前と後の効果、実験の前と後の結果の違いなどを調べる

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2

- 2つの標本のデータの各組を比較する
  - 「大きい（または、優れている）」となった組の数を n_1 とする
  - 「小さい（または、劣っている）」となった組の数を n_2 とする
  - 同じになった組は、検定から除外する

	1	2	3	4	5	...	n-1	n
標本A	5	3	3	4	2	...	2	4
標本B	3	5	1	5	2	...	1	2
A-B	+	−	+	−	0	...	+	+

- 試行回数が n_1+n_2 と見なして考えると、2つの標本の中央値に差がないとすれば、「大きい」と「小さい」となる確率は $\frac{1}{2}$ となるはず
- 標本数を $N=n_1+n_2$ とする

符号検定（小標本：二項検定を利用）

- 標本数が少ない場合は、二項検定を利用して、正確な有意確率を求める

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の中央値に差がある」

検定統計量の算出

- 試行回数が n_1+n_2 の状況で、帰無仮説が成り立つとすれば「大きい」と「小さい」となる確率は $\frac{1}{2}$ となるのを利用
- n_1 と n_2 の小さい方の値 m 以下に対応する符号が出現する確率を求める

$$m=\min(n_1,n_2)$$

- 二項検定を利用して、次の式から「m 回以下」起きる確率を算出する

$$P_0 = 2\sum_{i=0}^{m} {}_N C_i \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

仮説の判定

- 算出した有意確率（P値）と有意水準を比較する
  - 片側検定
    - 帰無仮説 H_0 を棄却：$P_0 < \alpha$
    - 帰無仮説 H_0 を採択：$P_0 \geq \alpha$
  - 両側検定
    - 帰無仮説 H_0 を棄却：$2P_0 < \alpha$
    - 帰無仮説 H_0 を採択：$2P_0 \geq \alpha$

符号検定（大標本：標準正規分布を利用）

- 標本数が多い場合は、標準正規分布を利用して検定する

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の中央値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の中央値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の中央値に差がある」

検定統計量の算出

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2|}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

- 二項分布は離散型の分布であるため、標準正規分布のような連続型の分布に近似すると、その精度はあまりよくない
- そこで、Yatesの連続補正をすることで、精度をよくする

$$z_0 = \frac{|n_1 - n_2| - 1}{\sqrt{n_1 + n_2}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|z_0| > z(\alpha/2)$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|z_0| < z(\alpha/2)$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

ウィルコクソンの符号付順位検定

- 対応のある2つの標本について、それぞれのデータの対（各組）の差の順にもとづいて検定する
- 変数が順序尺度、もしくは、正規性があるか不明で間隔・比例尺度の場合に使うことができる

検定の対象

対応のある2組の標本（標本数は同じ）について考える。

2つの標本AとBについて、データを表にまとめると次のようになったとする。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238

- 2つの標本のデータの各組を差 $d_i = A_i - B_i$ の絶対値を求める
  - 差が0の組は、この後の手続きから除外する
- それぞれの差の絶対値 $|d_i|$ に対応する組の数をもとに、差の絶対値の小さいほうから順位をつける
  - 同一順位の場合は、次のように扱う（平均順位）
    - 2位が2つある場合：2位と3位の中間 (2+3)/2=2.5位を順位とする
    - 4位が3つある場合：4位と5位と6位の中間 (4+5+6)/3=5位を順位とする
- 標本数 n を、差が0でない組の数とする

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
標本A	269	230	365	282	295	212	346	207	308	257
標本B	273	213	383	282	297	213	351	208	294	238
差 *d*	-4	17	18	0	-2	-1	-5	-1	14	19
順位	4	7	8		3	1.5	5	1.5	6	9

ウィルコクソンの符号付順位検定

- データ対の順位がわかる場合は、符号検定よりも効率が良い

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の代表値に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の代表値に差はない」
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の代表値に差がある」

検定統計量の算出

- 2つの標本の差 d_i の順位の和を、次のように求める
  - 差 d_i が正の値の順位の和を $T+$ とする
  - 差 d_i が負の値の順位の和を $T-$ とする
- $T+$ と $T-$ の小さい方の値を T_0 とする。
  - 標本数 n は、差が0でない組の数とする

$$T_0 = \min(T+, T-)$$

- $n \leq 25$ （または $n \leq 50$ ）の場合…
  - ウィルコクソンの符号付順位検定表から、標本数 n に対応する T の値を求める
- $n > 25$ （または $n > 50$ ）の場合…
  - 平均 μ_T と標準偏差 σ_T を次の式から求める

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$$
$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

  - 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{|T_0 - \mu_T|}{\sigma_T}$$

仮説の判定（検定表からの算出）

- $n \leq 25$ （または $n \leq 50$ ）の場合…
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$T_0 \geq T$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$T_0 < T$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」

- $n > 25$ （または $n > 50$ ）の場合…
- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|z_0| > z(\alpha/2)$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|z_0| < z(\alpha/2)$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「差があるとはいえない」