健康統計学 第14回

今回は、2つの標本の仮説検定（95～105ページ）について学習します。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第5版』縣 俊彦著 (南江堂)

今回の内容

1. 対応のない2組の平均値の差の検定 (母分散が既知)
2. 対応のない2組の平均値の差の検定 (母分散が未知だが等しい)
3. 対応のない2組の平均値の差の検定 (母分散が未知で等しくない)
4. 対応のある2組の平均値の差の検定
5. 比率の差の検定
    - 2つの標本の仮説検定の例題
6. 資料：平均値の検定のフロー

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が既知）

検定の対象

対応のない（独立した）2つの母集団について考える。それぞれの母数は次のとおり。

	母集団1	母集団2
母平均	μ_1	μ_2
母分散	${\sigma_1}^2$	${\sigma_2}^2$
標本の標本数	n_1	n_2
標本平均	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$

平均値の差のz検定

- 標本数の和が $n_1+n_2 \geq 100$ の場合にも使われることがある

帰無仮説と対立仮説

対応のない（独立した）2組の母集団の平均に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の母集団の平均に差はない」： $\mu_1=\mu_2$
- 対立仮説 H_1 は「2組の母集団の平均に差がある」： $\mu_1 \neq \mu_2$

検定統計量の算出

- 標本平均の差は、第1組の標本平均から第2組の標本平均の差になる

$$\overline{x}_1-\overline{x}_2$$

- 標本平均の差の分散は、各組の母分散を標本数で割ったものの総和になる

$$\sigma^2_{\overline{x}_1-\overline{x}_2}=\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}$$

  - なお、標本平均の差の分散の平方根をとったものを、「標本平均の差の標準誤差」という
- これらの式から、標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却： $|z_0|>z_{(\alpha/2)}$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「平均に差がある」
  - 帰無仮説 H_0 を採択： $|z_0|<z_{(\alpha/2)}$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「平均に差があるとはいえない」

例題

- ある製品の製造工程で、ある1週間に製造された製品200個の重さの平均は530g、標準偏差は6gであった。次の1週間に製造された製品180個の重さの平均は529g、標準偏差は5gであった。これらの結果から、それぞれの週に作られた製品の重さの平均に差はあるか？

考え方

「ある1週間」と「次の1週間」について、それぞれの製品の個数や重さの平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。なお、標本標準偏差の二乗が母分散と同じだと見なすことにする。

	ある1週間に製造された製品	次の1週間に製造された製品
母分散	$\sigma_1{}^2 = 6^2$	$\sigma_2{}^2 = 5^2$
標本の標本数	$n_1 = 200$	$n_2 = 180$
標本平均	$\bar{x}_1 = 530$	$\bar{x}_2 = 529$

それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 ：「それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差はない」
- 対立仮説 H_1 ：「それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差がある」

上の表にまとめた情報から、検定統計量 z_0 を求める。

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} \\
&= \frac{530 - 529}{\sqrt{\frac{6^2}{200} + \frac{5^2}{180}}} \\
&= 1.7708 \cdots \\
&\simeq 1.771
\end{aligned}
$$

この検定統計量を両側検定で判定すると、有意水準 $\alpha = 0.05$ では、$|z_0| = 1.771 < 1.960 = z_{(\alpha/2)}$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、それぞれの週に製造した製品の重さの平均に差があるとはいえない**。

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ でも、$|z_0| = 1.771 < 2.567 = z_{(\alpha/2)}$ となり、帰無仮説は棄却できない。

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が未知だが等しい）

検定の対象

対応のない（独立した）2つの母集団について考える。それぞれの母数は次のとおり。ただし、母分散の値はわからない。

	母集団1	母集団2
母平均	μ_1	μ_2
標本の標本数	n_1	n_2
標本平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
標本分散	${s_1}^2$	${s_2}^2$

等分散の検定（F検定）

まず、未知の2組の母分散が等しいかどうかを調べる。

1. 2組の標本の不偏分散について、次のようにあらわす
    - 値の大きいほうの標本：不偏分散 ${S_1}^2$ 、標本数 n_1
    - 値の小さいほうの標本：不偏分散 ${S_2}^2$ 、標本数 n_2
2. F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量 F_0 を次の式から算出する

$$F_0 = \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}$$

    - この式は、標本分散の比率から母分散の比率を推測することを意味している
3. 第1自由度が $n_1 - 1$ 、第2自由度が $n_2 - 1$ 、有意水準 α の有意点 *F* の値と、検定統計量を比較する
    - $F_0 < F$ ならば、母分散は未知で「等しい」
      → *t*検定で調べる
    - $F_0 \geq F$ ならば、母分散は未知で「等しくない」
      → Welchの検定で調べる

*t*検定

- 標本数の和が $n_1 + n_2 < 100$ の場合にも使われることがある

帰無仮説と対立仮説

対応のない（独立した）2組の母集団の平均に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の母集団の平均に差はない」： $\mu_1 = \mu_2$
- 対立仮説 H_1 は「2組の母集団の平均に差がある」： $\mu_1 \neq \mu_2$

検定統計量の算出

- 標本分散から、全体の分散（母分散 σ^2 の不偏推定量）を推測する

$$s_p{}^2=\frac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2}$$

- 標本平均の差の分散は、母分散を使って、次のように推測される

$$\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

- 母分散 σ^2 を不偏推定量 $s_p{}^2$ で代用し、t分布にしたがう、検定統計量 t_0 を次の式から算出する

$$t_0=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{s_p{}^2}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 t_0 と、自由度 $df=n_1+n_2-2$ 、有意水準 α の有意点の値（t分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|t_0|>t_{(\alpha/2)}(n_1+n_2-2)$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「平均に差がある」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|t_0|<t_{(\alpha/2)}(n_1+n_2-2)$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「平均に差があるとはいえない」

例題

- 2つの銘柄のたばこのニコチン含有量について調べた結果、銘柄Aの10本については平均27.0mg、標準偏差1.7mgであった。また、銘柄Bの7本については平均29.3mg、標準偏差1.9mgであった。この2つの銘柄の間でニコチンの含有量に差はあるか？

考え方

「銘柄A」のたばこと「銘柄B」について、それぞれの本数やニコチン含有量の平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	銘柄A	銘柄B
標本数	$n_1=10$	$n_2=7$
標本平均	$\bar{x}_1=27.0$	$\bar{x}_2=29.3$
標本分散	$s_1{}^2=1.7^2$	$s_2{}^2=1.9^2$

まず、母分散が等しいかどうかを調べるため、等分散の検定をする。F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量は、次のようになる。

$$\begin{aligned}F_0&=\frac{1.9^2}{1.7^2}\\&=1.2491\cdots\simeq1.249\end{aligned}$$

この値を、第1自由度が $7-1=6$ 、第2自由度が $10-1=9$ 、有意水準 $\alpha=0.05$ のF 値を分布表から調べると、3.374 となる。検定統計量と比較すると、$F_0<F$ となり、2組の標本の母分散は等分散であると判断できるので、t検定を用いる。

「銘柄A」のたばこと「銘柄B」について、ニコチン含有量の平均に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- **帰無仮説 H_0 ：「ニコチン含有量の平均に差はない」**
- **対立仮説 H_1 ：「ニコチン含有量の平均に差がある」**

検定統計量を求めるため、まず、全体の分散（母分散 σ^2 の不偏推定量）を求める。

$$
\begin{aligned}
s_p{}^2 &= \frac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2} \\
&= \frac{(10-1)1.7^2+(7-1)1.9^2}{10+7-2} \\
&= \frac{9\times2.89+6\times3.61}{15} \\
&= \frac{47.67}{15} = 3.178
\end{aligned}
$$

したがって、検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
t_0 &= \frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{s_p{}^2}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \\
&= \frac{27.0-29.3}{\sqrt{3.178}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{7}}} \\
&= 2.6180 \simeq= 2.618
\end{aligned}
$$

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha=0.05$ では、自由度 $df=10+7-2=15$ のt値を分布表から調べると、 $|t_0|>t_{(\alpha/2)}(15)=2.131$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、2つの銘柄のたばこのニコチン含有量には差がある**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ では、$|t_0|<t_{(\alpha/2)}(15)=2.947$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、有意水準1% では、2つの銘柄のたばこのニコチン含有量には差があるとはいえない。

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が未知で等しくない）

検定の対象

対応のない（独立した）2つの母集団について考える。それぞれの母数は次のとおり。ただし、母分散の値はわからない。

	母集団1	母集団2
母平均	μ_1	μ_2
標本の標本数	n_1	n_2
標本平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
標本分散	${s_1}^2$	${s_2}^2$

なお、標本平均は不偏分散から求める。

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

等分散の検定（F検定）

等分散の検定の結果、 $F_0 \geq F$ ならば、母分散は未知で「等しくない」場合に、この検定を使う

Welchの検定

- 標本数の和が $n_1 + n_2 > 100$ の場合にも使われることがある
- 2組の母集団の分散が2倍以上違う場合や、標本数が2倍上違う場合に使われることがあり、やや特殊な検定法である

帰無仮説と対立仮説

対応のない（独立した）2組の母集団の平均に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の母集団の平均に差はない」： $\mu_1 = \mu_2$
- 対立仮説 H_1 は「2組の母集団の平均に差がある」： $\mu_1 \neq \mu_2$

検定統計量の算出

- t分布にしたがう、検定統計量 t_0 を次の式から算出する

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}}$$

- なお、自由度は次のように算出する（整数にならない場合は、小数点以下を切り捨て）

$$df = \left(\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{{s_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}\right\}$$

  - 自由度の計算が複雑なので、あまりおススメの方法とはいえない…

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 t_0 と、自由度 df 、有意水準 α の有意点の値（t分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却 : $|t_0|>t_{(\alpha/2)}(df)$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「平均に差がある」
  - 帰無仮説 H_0 を採択 : $|t_0|<t_{(\alpha/2)}(df)$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「平均に差があるとはいえない」

例題

- 女子大学生にデートに臨むときのハイヒールの高さを聞いたところ、自分を「おしゃれ」と答えた24人のハイヒールの高さの平均は3.67cm、標準偏差は1.79cmであった。また、自分を「普通」と答えた48人のハイヒールの高さの平均は2.77cm、標準偏差は1.29cmであった。「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差はあるか？

考え方

自分を「おしゃれ」と答えた女子大生と自分を「普通」と答えた女子大生のハイヒールの高さについて、答えた人数やハイヒールの高さの平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	「おしゃれ」と答えた女子大生	「普通」と答えた女子大生
標本数	$n_1=24$	$n_2=48$
標本平均	$\bar{x}_1=3.67$	$\bar{x}_2=2.77$
標本分散	${s_1}^2=1.79^2$	${s_2}^2=1.29^2$

まず、母分散が等しいかどうかを調べるため、等分散の検定をする。F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量は、次のようになる。

$$F_0=\frac{1.79^2}{1.29^2}$$
$$=1.92542\cdots\simeq 1.925$$

この値を、第1自由度が $24-1=23$ 、第2自由度が $48-1=47$ 、有意水準 $\alpha=0.05$ のF 値を分布表から調べると、 $F=1.761$ となる。検定統計量と比較すると、 $F_0>F$ となり、2組の標本の母分散は等分散ではないと判断できるので、Welchの検定を用いる。

t分布にしたがう検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$t_0=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}}}$$
$$=\frac{3.67-2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24}+\frac{1.29^2}{48}}}$$
$$=\frac{3.67-2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24}+\frac{1.29^2}{48}}}$$
$$=2.82552\simeq 2.826$$

次に、検定のための自由度を求める。

$$
\begin{aligned}
df &= \left(\frac{s_1{}^2}{n_1}+\frac{s_2{}^2}{n_2}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{s_1{}^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2{}^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}\right\} \\
&= \left(\frac{1.79^2}{24}+\frac{1.29^2}{48}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{1.79^2}{24}\right)^2}{24-1}+\frac{\left(\frac{1.29^2}{48}\right)^2}{48-1}\right\} \\
&= 40.019
\end{aligned}
$$

整数分だけを自由度として採用すると、 $df=40$ となる。

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha=0.05$ では、自由度 $df=40$ のt値を分布表から調べると、 $|t_0|>t_{(\alpha/2)}(40)=2.021$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差がある**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ では、 $|t_0|>t_{(\alpha/2)}(40)=2.704$ となり、やはり帰無仮説は棄却される。

対応のある2組の平均値の差の検定

検定の対象

対応のある（同じ母集団の）2組の標本について考える。それぞれの統計量は次のとおり。

- 例えば、ある教育の前と後の効果、実験の前と後の結果の違いなどを調べる

	標本1（前）	標本2（後）
標本数	n	
標本平均	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$

対応のある*t*検定

- 母集団が正規分布にしたがっていることを、一応前提とする

帰無仮説と対立仮説

対応のある2組の標本の平均に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の平均に差はない」：$\overline{x_1} = \overline{x_2}$
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の平均に差がある」：$\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$

検定統計量の算出

- 2組の標本のデータの差 d を計算し、その差の標準偏差を算出する

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n-1}}$$

- t分布にしたがう、検定統計量 t_0 を次の式から算出する

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 t_0 と、自由度 $df = n-1$ 、有意水準 α の有意点の値（t分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却：$|t_0| > t_{(\alpha/2)}(n-1)$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「平均に差がある」
  - 帰無仮説 H_0 を採択：$|t_0| < t_{(\alpha/2)}(n-1)$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「平均に差があるとはいえない」

例題

- 街頭で180人の人に「体重を教えてください」と声をかけたときに、答えた体重と本当の体重の差ににについて、その差の平均は1.676kg、差の標準偏差は10.218kgであった。このとき、街頭で声をかけられて答えた体重と本当の体重に差はあるか？

考え方

街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重について、答えた人数や体重の平均と差の標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	回答された体重
標本数	$n=180$
差の平均	$\bar{d}=1.676$
差の標準偏差	$s_d=10.218$

街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重について差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 ：「街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重に差はない」
- 対立仮説 H_1 ：「街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重に差がある」

差の平均は、次のように、対応するデータ同士の差を求めて、その合計を標本数で割ったものになる。

	答えた体重	本当の体重	差
回答1	55kg	60kg	-5
回答2	52kg	56.5kg	-4.5
回答3	63kg	61kg	2
回答4	78	74	4
	…	…	…
回答 n	x_{1n}	x_{2n}	$d_n=x_{1n}-x_{2n}$
平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{d}$

t分布にしたがう検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
t_0 &= \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \\
&= \frac{1.676}{\frac{10.218}{\sqrt{180}}} \\
&= 2.20062\cdots=2.201
\end{aligned}
$$

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha=0.05$ では、自由度 $df=180-1=179$ のt値を分布表から調べると、該当する自由度がないため、最も近い自由度120のときのt値を読み取ると、$|t_0|>t_{(\alpha/2)}(179)\simeq t_{(\alpha/2)}(120)=1.980$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準5%で仮説検定を行った結果、街頭で声をかけてときに答えた体重と本当の体重には差がある**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ では、該当する自由度がないため、最も近い自由度120のときのt値を読み取ると、$|t_0|<t_{(\alpha/2)}(179)\simeq t_{(\alpha/2)}(120)=2.617$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、有意水準 1% では、街頭で声をかけてときに答えた体重と本当の体重には差があるとはいえない。

比率の差の検定

比率の差の検定には、次の2つの方法がある。

- 正規分布に近似して検定
- 独立性の検定（χ^2 検定）

ここでは、正規分布に近似する方法を説明する。

検定の対象

2組の標本のについて考える。それぞれの統計量は次のとおり。

	標本1	標本2
標本数	n_1	n_2
事象が起こる回数	r_1	r_2
標本比率	$p_1=\frac{r_1}{n_1}$	$p_2=\frac{r_2}{n_2}$

正規分布に近似する方法

この方法を使って、標本比率の差を検定するには、次の2つの条件を満たさないといけない

- $n_1p_1>5,\ (p_1<1-p_1)$ 、または $n_1>25$
- $n_2p_2>5,\ (p_2<1-p_2)$ 、または $n_2>25$

帰無仮説と対立仮説

2組の標本の比率に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の比率に差はない」： $p_1=p_2(=p)$
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の比率に差がある」： $p_1\neq p_2$

検定統計量の算出

- 母比率の推定値 $\hat{p}$ を求める

$$\hat{p}=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$$

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

仮説の判定（両側検定）

- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値（標準正規分布表などから求める）を使って、判定をする
  - 帰無仮説 H_0 を棄却： $|z_0|>z_{(\alpha/2)}$
    - 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「比率に差がある」
  - 帰無仮説 H_0 を採択： $|z_0|<z_{(\alpha/2)}$
    - 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「比率に差があるとはいえない」

例題

- 男性有権者の中から1,200人、女性有権者の中から900人を選んで、内閣の支持者の数を調べた結果、それぞれ432人と276人であった。男性と女性間で支持率に差があるといえるか？

考え方

男女それぞれ有権者について、それぞれの人数や支持者の数についてまとめると、次の表のようになる。

	男性有権者	女性有権者
標本数	$n_1=1200$	$n_2=900$
事象が起こる数	$r_1=432$	$r_2=276$
標本比率	$p_1=\frac{r_1}{n_1}=0.36$	$p_2=\frac{r_2}{n_2}=0.30666\cdots$

男女それぞれ有権者について、内閣支持率に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 ：「男性と女性とで内閣支持率に差はない」
- 対立仮説 H_1 ：「男性と女性とで内閣支持率に差がある」

まず、母比率の推定値 $\hat{p}$ を求める

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2} \\ &= \frac{1200\times0.36+900\times0.30666\cdots}{1200+900} \\ &= \frac{432+276}{2100}=0.33714\cdots\simeq0.3371\end{aligned}$$

したがって、検定統計量 z_0 を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{p_1-p_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \\ &= \frac{0.36-0.30666\cdots}{\sqrt{0.3371\times(1-0.3371)\left(\frac{1}{1200}+\frac{1}{900}\right)}} \\ &= 2.55849\cdots\simeq2.558\end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定すると、有意水準 $\alpha=0.05$ では、 $|z_0|=2.558>z_{(\alpha/2)}=1.960$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、男性と女性とで内閣支持率に差がある**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ では、 $|z_0|=2.558<z_{(\alpha/2)}=2.567$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、男性と女性とで内閣支持率に差があるとはいえない。

2つの標本の仮説検定の例題

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が既知）

例題

ある製品の製造工程で、ある1週間に製造された製品200個の重さの平均は530g、標準偏差は6gであった。次の1週間に製造された製品180個の重さの平均は529g、標準偏差は5gであった。これらの結果から、それぞれの週に作られた製品の重さの平均に差はあるか？

考え方

「ある1週間」と「次の1週間」について、それぞれの製品の個数や重さの平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。なお、標本標準偏差の二乗が母分散と同じだと見なすことにする。

	ある1週間に製造された製品	次の1週間に製造された製品
母分散	${\sigma_1}^2=6^2$	${\sigma_2}^2=5^2$
標本の標本数	$n_1=200$	$n_2=180$
標本平均	$\bar{x}_1=530$	$\bar{x}_2=529$

それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 ：「それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差はない」
- 対立仮説 H_1 ：「それぞれの週に製造された製品の重さの平均に差がある」

上の表にまとめた情報から、検定統計量 z_0 を求める。

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1}+\frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}} \\ &= \frac{530-529}{\sqrt{\frac{6^2}{200}+\frac{5^2}{180}}} \\ &= 1.7708\cdots \\ &\simeq 1.771 \end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定すると、有意水準 $\alpha=0.05$ では、$|z_0|=1.771<1.960=z_{(\alpha/2)}$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、それぞれの週に製造した製品の重さの平均に差があるとはいえない**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ でも、$|z_0|=1.771<2.567=z_{(\alpha/2)}$ となり、帰無仮説は棄却できない。

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が未知だが等しい）

例題

2つの銘柄のたばこのニコチン含有量について調べた結果、銘柄Aの10本については平均27.0mg、標準偏差1.7mgであった。また、銘柄Bの7本については平均29.3mg、標準偏差1.9mgであった。この2つの銘柄の間でニコチンの含有量に差はあるか？

考え方

「銘柄A」のたばこと「銘柄B」について、それぞれの本数やニコチン含有量の平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	銘柄A	銘柄B
標本数	$n_1=10$	$n_2=7$
標本平均	$\bar{x}_1=27.0$	$\bar{x}_2=29.3$
標本分散	${s_1}^2=1.7^2$	${s_2}^2=1.9^2$

まず、母分散が等しいかどうかを調べるため、等分散の検定をする。F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量は、次のようになる。

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1.9^2}{1.7^2} \\ &= 1.2491\cdots \simeq 1.249 \end{aligned}$$

この値を、第1自由度が $7-1=6$ 、第2自由度が $10-1=9$ 、有意水準 $\alpha=0.05$ のF 値を分布表から調べると、3.374 となる。検定統計量と比較すると、$F_0<F$ となり、2組の標本の母分散は等分散であると判断できるので、t検定を用いる。

「銘柄A」のたばこと「銘柄B」について、ニコチン含有量の平均に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 :「ニコチン含有量の平均に差はない」
- 対立仮説 H_1 :「ニコチン含有量の平均に差がある」

検定統計量を求めるため、まず、全体の分散（母分散 σ^2 の不偏推定量）を求める。

$$\begin{aligned} {s_p}^2 &= \frac{(n_1-1){s_1}^2+(n_2-1){s_2}^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{(10-1)1.7^2+(7-1)1.9^2}{10+7-2} \\ &= \frac{9\times2.89+6\times3.61}{15} \\ &= \frac{47.67}{15} = 3.178 \end{aligned}$$

したがって、検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{{s_p}^2}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \\ &= \frac{27.0-29.3}{\sqrt{3.178}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{7}}} \\ &= 2.6180 \simeq= 2.618 \end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha = 0.05$ では、自由度 $df = 10+7-2 = 15$ のt値を分布表から調べると、$|t_0| > t_{(\alpha/2)}(15) = 2.131$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、2つの銘柄のたばこのニコチン含有量には差がある**。

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ では、$|t_0| < t_{(\alpha/2)}(15) = 2.947$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、有意水準1% では、2つの銘柄のたばこのニコチン含有量には差があるとはいえない。

対応のない2組の平均値の差の検定（母分散が未知で等しくない）

例題

女子大生に、デートに臨むときのハイヒールの高さを聞いたところ、自分を「おしゃれ」と答えた24人のハイヒールの高さの平均は3.67cm、標準偏差は1.79cmであった。また、自分を「普通」と答えた48人のハイヒールの高さの平均は2.77cm、標準偏差は1.29cmであった。「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差はあるか？

考え方

自分を「おしゃれ」と答えた女子大生と自分を「普通」と答えた女子大生のハイヒールの高さについて、答えた人数やハイヒールの高さの平均と標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	「おしゃれ」と答えた女子大生	「普通」と答えた女子大生
標本数	$n_1 = 24$	$n_2 = 48$
標本平均	$\bar{x}_1 = 3.67$	$\bar{x}_2 = 2.77$
標本分散	${s_1}^2 = 1.79^2$	${s_2}^2 = 1.29^2$

まず、母分散が等しいかどうかを調べるため、等分散の検定をする。F分布にしたがう、等分散の検定の検定統計量は、次のようになる。

$$F_0 = \frac{1.79^2}{1.29^2} = 1.92542\cdot\cdot\cdot \simeq 1.925$$

この値を、第1自由度が $24-1 = 23$ 、第2自由度が $48-1 = 47$ 、有意水準 $\alpha = 0.05$ のF 値を分布表から調べると、$F = 1.761$ となる。検定統計量と比較すると、$F_0 > F$ となり、2組の標本の母分散は等分散ではないと判断できるので、Welchの検定を用いる。

t分布にしたがう検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{{s_1}^2}{n_1} + \frac{{s_2}^2}{n_2}}} = \frac{3.67-2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24} + \frac{1.29^2}{48}}} = \frac{3.67-2.77}{\sqrt{\frac{1.79^2}{24} + \frac{1.29^2}{48}}} = 2.82552 \simeq 2.826$$

次に、検定のための自由度を求める。

$$df = \left(\frac{{s_1}^2}{n_1}+\frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{{s_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{{s_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}\right\}$$
$$= \left(\frac{1.79^2}{24}+\frac{1.29^2}{48}\right)^2 \div \left\{\frac{\left(\frac{1.79^2}{24}\right)^2}{24-1}+\frac{\left(\frac{1.29^2}{48}\right)^2}{48-1}\right\}$$
$$= 40.019$$

整数分だけを自由度として採用すると、 $df=40$ となる。

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha=0.05$ では、自由度 $df=40$ のt値を分布表から調べると、 $|t_0|>t_{(\alpha/2)}(40)=2.021$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、「おしゃれ」と答えた人たちと「普通」と答えた人たちとでハイヒールの高さに差がある**。

なお、有意水準 $\alpha=0.01$ では、$|t_0|>t_{(\alpha/2)}(40)=2.704$ となり、やはり帰無仮説は棄却される。

対応のある2組の平均値の差の検定

例題

街頭で180人の人に「体重を教えてください」と声をかけたときに、答えた体重と本当の体重の差ににつ いて、その差の平均は1.676kg、差の標準偏差は10.218kgであった。このとき、街頭で声をかけられて答えた体重と本当の体重に差はあるか？

考え方

街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重について、答えた人数や体重の平均と差の標準偏差についてまとめると、次の表のようになる。

	回答された体重
標本数	$n=180$
差の平均	$\bar{d}=1.676$
差の標準偏差	$s_d=10.218$

街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重について差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 ：「街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重に差はない」
- 対立仮説 H_1 ：「街頭で声をかけて答えた体重と本当の体重に差がある」

差の平均は、次のように、対応するデータ同士の差を求めて、その合計を標本数で割ったものになる。

	答えた体重	本当の体重	差
回答1	55kg	60kg	-5
回答2	52kg	56.5kg	-4.5
回答3	63kg	61kg	2
回答4	78	74	4
	…	…	…
回答 n	x_{1n}	x_{2n}	$d_n = x_{1n} - x_{2n}$
平均	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{d}$

t分布にしたがう検定統計量 t_0 を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1.676}{\frac{10.218}{\sqrt{180}}} \\ &= 2.20062\cdots = 2.201 \end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定する。有意水準 $\alpha = 0.05$ では、自由度 $df = 180 - 1 = 179$ のt値を分布表から調べると、該当する自由度がないため、最も近い自由度120のときのt値を読み取ると、$|t_0| > t_{(\alpha/2)}(179) \simeq t_{(\alpha/2)}(120) = 1.980$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、街頭で声をかけてときに答えた体重と本当の体重には差がある**。

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ では、該当する自由度がないため、最も近い自由度120のときのt値を読み取ると、$|t_0| < t_{(\alpha/2)}(179) \simeq t_{(\alpha/2)}(120) = 2.617$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、有意水準 1% では、街頭で声をかけてときに答えた体重と本当の体重には差があるとはいえない。

比率の差の検定

例題

男性有権者の中から1,200人、女性有権者の中から900人を選んで、内閣の支持者の数を調べた結果、それぞれ432人と276人であった。男性と女性間で支持率に差があるといえるか？

考え方

男女それぞれ有権者について、それぞれの人数や支持者の数についてまとめると、次の表のようになる。

	男性有権者	女性有権者
標本数	$n_1 = 1200$	$n_2 = 900$
事象が起こる数	$r_1 = 432$	$r_2 = 276$
標本比率	$p_1 = \frac{r_1}{n_1} = 0.36$	$p_2 = \frac{r_2}{n_2} = 0.30666\cdots$

男女それぞれ有権者について、内閣支持率に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- **帰無仮説 H_0 :「男性と女性とで内閣支持率に差はない」**
- **対立仮説 H_1 :「男性と女性とで内閣支持率に差がある」**

まず、母比率の推定値 $\hat{p}$ を求める

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{1200 \times 0.36 + 900 \times 0.30666\cdots}{1200 + 900} \\ &= \frac{432 + 276}{2100} = 0.33714\cdots \simeq 0.3371\end{aligned}$$

したがって、検定統計量 z_0 を求めると、次のようになる。

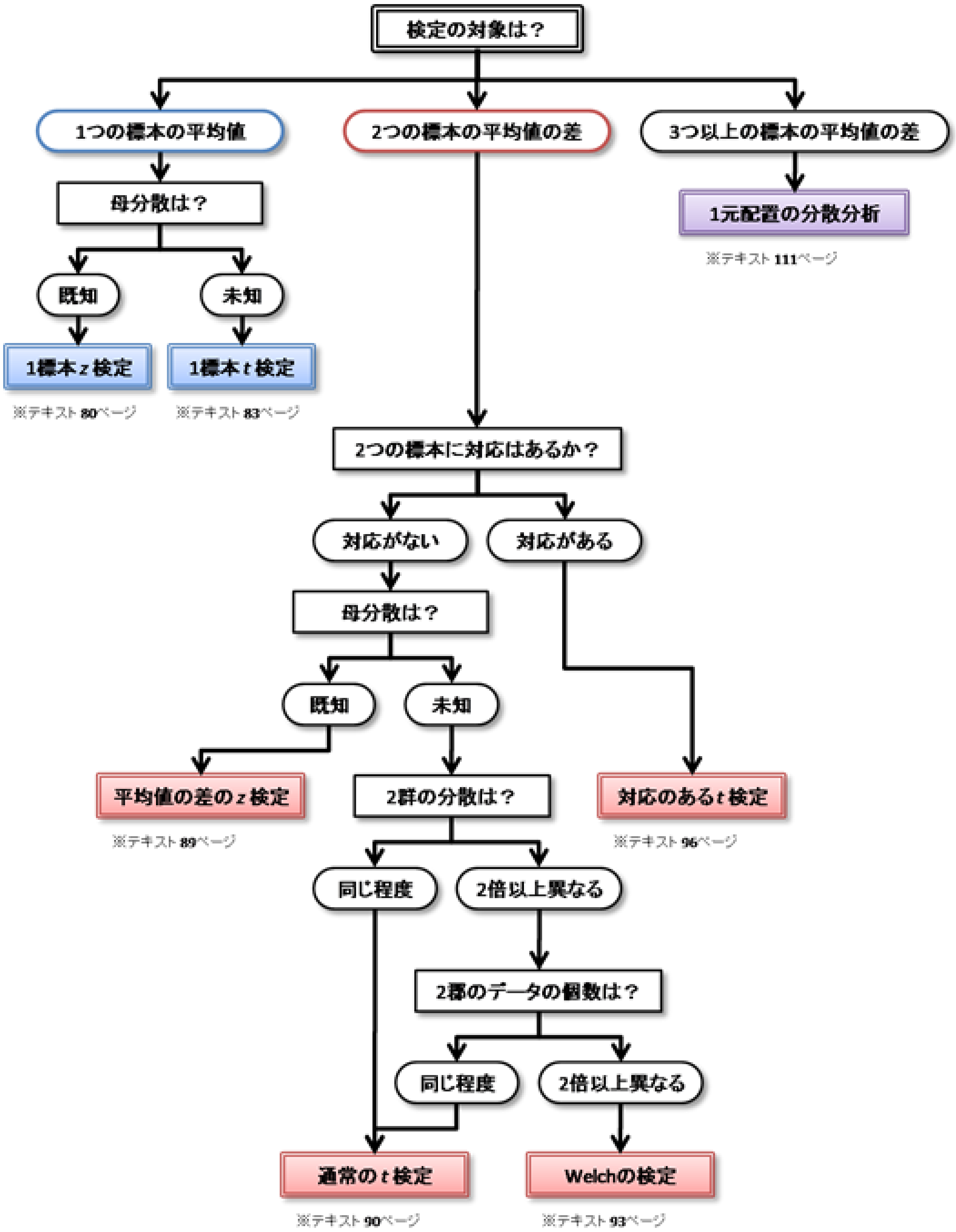
$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \\ &= \frac{0.36 - 0.30666\cdots}{\sqrt{0.3371 \times (1 - 0.3371)\left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{900}\right)}} \\ &= 2.55849\cdots \simeq 2.558\end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定すると、有意水準 $\alpha = 0.05$ では、$|z_0| = 2.558 > z_{(\alpha/2)} = 1.960$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、男性と女性とで内閣支持率に差がある**。

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ では、$|z_0| = 2.558 < z_{(\alpha/2)} = 2.567$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、男性と女性とで内閣支持率に差があるとはいえない。

平均値の検定のフロー

PDF版は こちらのファイルをダウンロード（右クリックして「対象をファイルに保存」を選択）。



参考：田久浩志，小島隆矢，こやまけいこ，ビーコム「マンガでわかるナースの統計学」，オーム社 (2006.05).