健康統計学 第5回

今回は、確率・順列・組み合わせ（テキスト45～52ページ）について学習します。

テキスト

- 『やさしい保健統計学 改訂第4版』縣 俊彦著 (南江堂)

次回の連絡

- 次回は、ここまでのまとめとして、表計算ソフトを使った、記述統計の処理をします。
    - 代表値、散布度、相関、回帰
- 中間試験は第7回に変更します。自己採点も同時に行います。

今回の内容

確率

事象

- あることが起こった結果を、「**事象**」といい、事象 A を A と表す
  - 全体の事象のことを「**全事象**」といい、Ω と表す
  - 決して起こらないことを「**空事象**」といい、ϕ と表す
  - 事象 A または B が起こる確率を「**和事象**」といい、$A \cup B$ と表す
  - 事象 A と B が同時に起こる確率を「**積事象**」といい、$A \cap B$ と表す

確率 (Probability)

- 「確率」とは、あることが起こる結果の割合、つまり起こりやすさの目安である
  - ある事象 A が起こる確率を、$\mathrm{P}(A)$ と表す
  - 確率は、0 から 1 の間の値をとる

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$$

    - 全事象の確率は $\mathrm{P}(\Omega)=1$ となる
    - 空事象の確率は $\mathrm{P}(\phi)=0$ となる

数学的確率

- あることが起こる結果が何通りあるかを元にしてだす確率を、「**数学的確率**」という
- 例えば…
  - サイコロの目の出方は6通り
  - 3の目が出る確率は 1/6
- 事象Aの確率は、事象 A の起こる場合の数 a を、すべての場合の数 (何通りあるかすべて数えたもの) N で割ったものである

$$\mathrm{P}(A)=\frac{a}{N}$$

統計的確率

- 実際に起こった結果を元にしてだす確率を、「**統計的確率**」という
- 例えば…
  - 実際にサイコロを60回投げたら、3の目が13回出た
  - この時点での、3の目が出た確率は 13/60
- 事象Aの確率は、事象Aの起こった回数 r を、すべての起こった回数 n で割ったものである

$$\mathrm{P}(A)=\frac{r}{n}$$

大数の法則

- **試行** (あることを実施する) 回数を増やせば増やすほど、統計的確率が数学的確率に近づいていくことを、「**大数の法則**」という
- 例えば…
  - 実際にサイコロを1,000回投げたら、3の目が1,300回出た
  - その結果、3の目が出た確率はほぼ 1/3

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r}{n} = \frac{a}{N}$$

加法定理

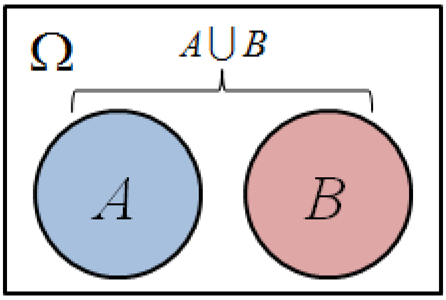
排反前提の場合

- 2つ、または2つ以上の**排反事象**（同時に起こりえない事象）が起こる確率は、それぞれの確率の和である

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A \cup B \cup C \cdots) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots$$

  - 同時に起こりえない（2つ、または2つ以上の）事象を「**排反事象**」という

$$A \cup B = \phi$$



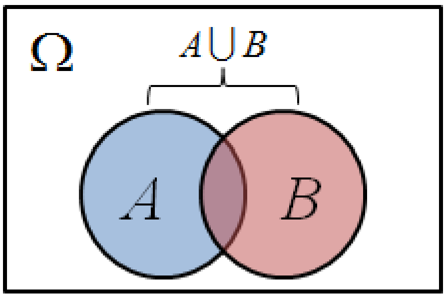
- 例：52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはダイヤを引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

一般の場合

- 2つ、または2つ以上の事象が起こる確率は、それぞれの確率の和から、それぞれの事象が同時に起こる確率を引いたもの

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- 例：52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはA（エース）を引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} \\ &= \frac{4}{13} \end{aligned}$$

乗法定理

条件つき確率

- 「A が起こったときに B が起きる」事象を、$B|A$ と表す

- 「A が起こったときに B が起きる」事象の確率、つまり、A が起こったという条件のもとで B が起きる確率を、「**条件つき確率**」といい、$\mathrm{P}(B|A)$ と表す

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

- 上の式の両辺に $\mathrm{P}(A)$ を掛けると、次のように式が変形できる

$$\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)$$

  - B が A に関係なく起きる（事象 A と B が独立な事象である）場合、「乗法定理」が導き出せる
- 例：サイコロを投げて、奇数の目が出たとき（事象 A ）に、それが1の目である（事象 B ）確率は、次のとおり

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

  - A = 奇数の目が出る = {1, 3 ,5}
  - B = 1の目が出る = {1}
- 例：ある男女100人について結婚しているかどうか調査した結果が、次のようになった。この100人から1人を選んだとき、それが結婚している男性である確率は？

	男性	女性	合計
結婚している	26	21	47
結婚していない	29	24	53
合計	55	45	100

  - A = 選んだ人が男性である = 55人
  - $A \cap B$ = 結婚している男性である = 26人

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A) &= \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \\ &= \frac{26}{55}\end{aligned}$$

乗法定理

- 2つ、または2つ以上の互いに独立な事象が同時に（または続けて）起こる確率は、確率の積になる

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(A \cap B \cap C \cdots) &= \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(C) \times \cdots\end{aligned}$$

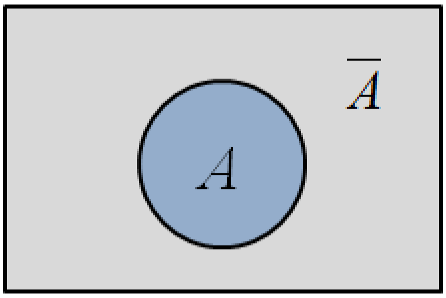
- 「**独立事象**」とは、ある事象の発生する確率が、他のいずれの事象の影響も受けない（他の事象に関係なく発生する事象）
- 例：サイコロを2回投げて、2回とも1の目が出る確率（1の目が出た後、1の目が出る確率）は、次のとおり

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}\end{aligned}$$

余事象

- ある事象Aについて、その事象がおこらないすべての場合（の事象）を「**余事象**」 $\overline{A}$ と表す
- 余事象が起こる確率を $\mathrm{P}(\overline{A})$ と表す

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



- 例：サイコロを2回投げたとき、「**少なくとも**」1回は3の目が出る確率は、次のとおり
    a. 「少なくとも〜」の場合は、余事象の確率を考える
    b. サイコロを1回投げて、3の目が全く出ない確率は 5/6
    c. 2回目も3の目が出ない確率は、次のようになる

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

    d. サイコロを2回目投げて何かが出る確率（=1）から、2回とも3の目が出ない確率をひけば、少なくとも1回は3の目が出る確率になる

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

順列と組み合わせ

階乗（factorial）

- ある数 n から1ずつ少ない数を掛けあわせることを「**階乗**」という

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdot\cdot\cdot\times2\times1$$

- なお、0 (ゼロ) の階乗は、便宜上、1である。

順列 (Permutation)

- 異なる n 個のものから r 個を選んだ「**並べ方**」を、n 個から r 個をとる「**順列**」という

$$\begin{aligned}{}_nP_r &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdot\cdot\cdot\times(n-r+1)\\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

- n 個から n 個をとる順列

$${}_nP_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdot\cdot\cdot\times2\times1 = n!$$

- 7 個から 3 個をとる順列

$${}_7P_3 = 7\times6\times5 = 210$$

- また次のようなことがいえる (n 個から0個をとる順列)

$${}_nP_0 = 0$$

組み合わせ (Combination)

- 異なる n 個のものから r 個を選ぶときの組み合わせを、n 個から r 個をとる「**組み合わせ**」という

$$\begin{aligned}{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!}\\ &= \frac{n\times(n-1)\times\cdot\cdot\cdot\times(n-r+1)}{r!}\\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}\end{aligned}$$

- 4 個から 3 個をとる組み合わせ

$${}_4C_3 = \frac{4\times3\times2}{1\times2\times3} = 4$$

- なぜ ${}_nC_r = {}_nP_r / r!$ となるか？
  - {a, b, c, d, e} の5つから {a, b, c} の3つを選ぶ場合を考えると…
    - 順列は次の 3!=6 通りとなる
      {a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}
    - 組み合わせでは順序を考えないので、順列の結果を 3!=6 で割ってやればよい
- また次のようなことがいえる

$$
\begin{gathered}
{}_n\mathrm{C}_0 = 1 \\
{}_n\mathrm{C}_1 = n \\
{}_n\mathrm{C}_n = 1 \\
{}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}
\end{gathered}
$$