# 2010/9th/Expected_Value

2025年 6月 18日
目次


- 2010/9th/Expected_Value0
  - 確率変数の期待値と分散0
    - 期待値（平均値）0
      - 期待値とは0
      - 期待値の計算例（1）0
      - 期待値の計算例（2）0
      - 期待値の計算例（3）0
      - 期待値と算術平均との関係0
    - 分散と標準偏差0
      - 確率変数の分散と標準偏差0
      - 確率変数の分散と標準偏差の特徴0
      - 確率変数の分散と標準偏差の計算0


# 確率変数の期待値と分散

▲ ▼

## 期待値（平均値）

▲ ▼

### 期待値とは

- 確率変数 $X$ の確率分布が次のようなとき、

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| **確率** | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

- 確率変数 $X$ の平均値、または期待値は、次のように表せる

$$\mu = E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

- 期待値とは、1回の試行の結果として期待される値の大きさを表す

▲ ▼

### 期待値の計算例（1）

- サイコロを1回投げたときにでた目の数を確率変数 $X$ を使うと、その確率分布は次のようになる

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **確率** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

- 確率変数 $X$ の期待値（平均値）は、$n=6$ なので、

$$x_1=1,\ x_2=2,\ \cdots,\ x_6=6$$

$$p_1=\frac{1}{6},\ p_2=\frac{1}{6},\ \cdots,\ p_6=\frac{1}{6}$$

- したがって、次のようになる

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{21}{6}=3.5$$

- つまり、サイコロを何回も投げたときに、でた目の平均をとると 3.5 になることを示している

▲▼

**期待値の計算例（2）**

- サイコロを5回連続で投げたときに1の目が出る回数を確率変数 $X$ とすると、その確率分布は次のようになる

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **確率** | 0.4019 | 0.4019 | 0.1608 | 0.0322 | 0.0032 | 0.0001 |

- 確率変数 $X$ の期待値（平均値）は、$n=6$ なので、

$$x_1=0,\ x_2=1,\ \cdots,\ x_6=5$$

$$p_1=0.4019,\ p_2=0.4019,\ \cdots,\ p_6=0.0001$$

- したがって、次のようになる

$$E(X)=0\times0.4019+1\times0.4019+2\times0.1608+3\times0.0322+4\times0.0032+5\times0.0001$$
$$\simeq 0.83$$

- つまり、サイコロを5回連続投げて1の目が出るのは1回あるかないか程度であることを示している

▲▼

**期待値の計算例（3）**

- 宝くじの期待値を求めることもできる。宝くじの場合は「当せん金×当せん確率」の合計が期待値となる。
- 例えば、平成21年年末ジャンボ宝くじは、1ユニット（1000万枚）あたり、次のような当せん本数になっている。なお、当せん確率は「当せん本数÷1000万×100」から求めている。

| 等級 | 当せん金 | 当せん本数 | 当せん確率 |
|---|---|---|---|
| 1等 | 200,000,000円 | 1本 | 0.00001% |
| 1等前後賞 | 50,000,000円 | 2本 | 0.00002% |
| 1等組違い賞 | 100,000円 | 99本 | 0.00099% |
| 2等 | 100,000,000円 | 2本 | 0.00002% |
| 3等 | 5,000,000円 | 10本 | 0.0001% |
| 4等 | 100,000円 | 600本 | 0.006% |
| 5等 | 10,000円 | 10,000本 | 0.1% |
| 6等 | 3,000円 | 100,000本 | 1% |
| 7等 | 300円 | 1,000,000本 | 10% |
| 元気に2010年賞 | 1,000,000円 | 100本 | 0.001% |

- 宝くじがいくら当たるかの期待値を調べるには、「当せん金×当せん確率」の合計を求めるので、

$$E(X) = 200{,}000{,}000 \times 0.00001\% + 50{,}000{,}000 \times 0.00002\% + \cdots + 300 \times 10\% + 1{,}000{,}000 \times 0.001\%$$
$$= 141.99$$

- つまり、宝くじ1枚（300円）を買うと、1枚につき141.99円の還元が期待できる、ということを示している。

▲▼

### 期待値と算術平均との関係

- n 個のデータ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均値は、次のように表せる
$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$= x_1 \times \frac{1}{n} + x_2 \times \frac{1}{n} + \cdots + x_n \times \frac{1}{n}$$
- ここで確率について、$p_1 = \frac{1}{n}, p_2 = \frac{1}{n}, \cdots, p_n = \frac{1}{n}$ とおく、つまり各々の確率が等しいと考えると、
$$\overline{x} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$
$$= E(X)$$
- すなわち、各々の確率が等しくても等しくなくても、平均値（期待値）を求めることができる

▲▼

## 分散と標準偏差

▲▼

### 確率変数の分散と標準偏差

- 確率変数 $X$ の確率分布が次のようなとき、

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| **確率** | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

- 確率変数 $X$ の分散は次のように表す
$$\sigma^2 = V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) p_i$$
- $\mu$ は期待値 $E(X)$ 簡単に表したもの
- 分散の正の平方根を、確率変数 $X$ の標準偏差といい、次のように表す
$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

▲▼

### 確率変数の分散と標準偏差の特徴

- 分散や標準偏差が小さいほど、確率変数の値は平均に集中し、ばらつきが小さい
- 分散や標準偏差が大きいほど、確率変数の値は平均から離れ、ばらつきが大きい
- 分散は変数の単位の2乗を表す（例えば変数の単位がcmなら、分散の単位cm^2）ため、元の単位と同じ標準偏差を用いて平均からのばらつきを表す

▲▼

**確率変数の分散と標準偏差の計算**

- **サイコロを1回投げたときにでた目の数を確率変数 $X$ を使うと、その確率分布は次のようになる**

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **確率** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

- **したがって、分散は次のようにして求められる**

$$\sigma^2 = V(X) = (1-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + (6-3.5)^2 \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{35}{12} \simeq 2.92$$

- **また、標準偏差は次のようになる**

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$
$$= \sqrt{\frac{35}{12}} \simeq 1.71$$

- **つまり、サイコロを何回も投げたとき、そのでた目の平均が** 3.5 ± 1.71 （1.79〜5.21）**の範囲になる確率が高いことを示している**