

順列と組み合わせ

階乗 (factorial)

- ある数 n から1ずつ少ない数を掛けあわせることを「階乗」という

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

- なお、0 (ゼロ) の階乗は、便宜上、1である。

順列 (Permutation)

- 異なる n 個のものから r 個を選んだ「並べ方」を、 n 個から r 個をとる「順列」という

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

- n 個から n 個をとる順列

$${}_n P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

- 7 個から 3 個をとる順列

$${}_7 P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

- また次のようなことがいえる (n 個から0個をとる順列)

$${}_n P_0 = 1$$

組み合わせ (Combination)

- 異なる n 個のものから r 個を選ぶときの組み合わせを、 n 個から r 個をとる「組み合わせ」という

$$\begin{aligned} {}_n C_r &= \frac{{}_n P_r}{r!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

- 4 個から 3 個をとる組み合わせ

$${}_4 C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$$

- なぜ ${}_n C_r = {}_n P_r / r!$ となるか？

○ $\{a, b, c, d, e\}$ の5つから $\{a, b, c\}$ の3つを選ぶ場合を考えると…

- 順列は次の $3! = 6$ 通りとなる

$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$

- 組み合わせでは順序を考えないので、順列の結果を $3! = 6$ で割ってやればよい

- また次のようなことがいえる

$$\begin{aligned}
 {}_nC_0 &= 1 \\
 {}_nC_1 &= n \\
 {}_nC_n &= 1 \\
 {}_nC_r &= {}_nC_{n-r}
 \end{aligned}$$