比率の差の検定

比率の差の検定には、次の2つの方法がある。

- 正規分布に近似して検定
- 独立性の検定 (χ^2 検定)

ここでは、正規分布に近似する方法を説明する。

検定の対象

2組の標本のについて考える。それぞれの統計量は次のとおり。

	標本1	標本2
標本数	n_1	n_2
事象が起こる回数	r_1	r_2
標本比率	$p_1 = \frac{r_1}{n_1}$	$p_2 = \frac{r_2}{n_2}$

正規分布に近似する方法

この方法を使って、標本比率の差を検定するには、次の2つの条件を満たさないといけない

- $n_1 p_1 > 5$, ($p_1 < 1 - p_1$)、または $n_1 > 25$
- $n_2 p_2 > 5$, ($p_2 < 1 - p_2$)、または $n_2 > 25$

帰無仮説と対立仮説

2組の標本の比率に差があるかどうかを調べる。

- 帰無仮説 H_0 は「2組の標本の比率に差はない」: $p_1 = p_2 (= p)$
- 対立仮説 H_1 は「2組の標本の比率に差がある」: $p_1 \neq p_2$

検定統計量の算出

- 母比率の推定値 $\hat{p}$ を求める

$$\hat{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

- 標準正規分布にしたがう、検定統計量 z_0 を次の式から算出する

$$z_0 = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

仮説の判定 (両側検定)

- 検定統計量 z_0 と、有意水準 α の有意点の値 (標準正規分布表などから求める) を使って、判定をする

◦ 帰無仮説 H_0 を棄却: $|z_0| > z_{(\alpha/2)}$

- 「有意に差がある」「検定の結果、有意である」「比率に差がある」

◦ 帰無仮説 H_0 を採択: $|z_0| < z_{(\alpha/2)}$

- 「有意に差はない」「検定の結果、有意でない」「比率に差があるとはいえない」

例題

- 男性有権者の中から1,200人、女性有権者の中から900人を選んで、内閣の支持者の数を調べた結果、それぞれ432人と276人であった。男性と女性間で支持率に差があるといえるか？

考え方

男女それぞれ有権者について、それぞれの人数や支持者の数についてまとめると、次の表のようになる。

	男性有権者	女性有権者
標本数	$n_1 = 1200$	$n_2 = 900$
事象が起こる数	$r_1 = 432$	$r_2 = 276$
標本比率	$p_1 = \frac{r_1}{n_1} = 0.36$	$p_2 = \frac{r_2}{n_2} = 0.30666\cdots$

男女それぞれ有権者について、内閣支持率に差があるかどうか調べたいので、帰無仮説と対立仮説は、次のようになる。

- 帰無仮説 H_0 : 「男性と女性とで内閣支持率に差はない」
- 対立仮説 H_1 : 「男性と女性とで内閣支持率に差がある」

まず、母比率の推定値 $\hat{p}$ を求める

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{1200 \times 0.36 + 900 \times 0.30666\cdots}{1200 + 900} \\ &= \frac{432 + 276}{2100} = 0.33714\cdots \approx 0.3371\end{aligned}$$

したがって、検定統計量 z_0 を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \\ &= \frac{0.36 - 0.30666\cdots}{\sqrt{0.3371 \times (1 - 0.3371) \left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{900}\right)}} \\ &= 2.55849\cdots \approx 2.558\end{aligned}$$

この検定統計量を両側検定で判定すると、有意水準 $\alpha = 0.05$ では、 $|z_0| = 2.558 > z_{(\alpha/2)} = 1.960$ となり、帰無仮説は棄却される。つまり、**有意水準 5% で仮説検定を行った結果、男性と女性とで内閣支持率に差がある。**

なお、有意水準 $\alpha = 0.01$ では、 $|z_0| = 2.558 < z_{(\alpha/2)} = 2.567$ となり、帰無仮説は棄却できない。つまり、男性と女性とで内閣支持率に差があるとはいえない。