

確率

事象

- あることが起こった結果を、「事象」という
 - 事象Aを A と表す
 - 全体の事象のことを「全事象」といい、 Ω と表す
 - 決して起こらないことを「空事象」といい、 ϕ と表す
 - 事象AまたはBが起こる確率を「和事象」といい、 $A \cup B$ と表す
 - 事象AとBが同時に起こる確率を「積事象」といい、 $A \cap B$ と表す

確率 (Probability)

- 「確率」とは、あることが起こる結果の割合、つまり起こりやすさの目安である
 - ある事象 A が起こる確率を、 $P(A)$ と表す
 - 確率は、0から1の間の値をとる

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- 全事象の確率は $P(\Omega) = 1$ となる
- 空事象の確率は $P(\phi) = 0$ と書く

数学的確率

- あることが起こる結果が何通りあるかを元にしてだす確率を、「**数学的確率**」という
- 例えば...
 - サイコロの目の出方は6通り
 - 3の目が出る確率は $1/6$
- 事象Aの確率は、事象Aの起こる場合の数 a を、すべての場合の数 (何通りあるかすべて数えたもの) N で割ったものである

$$P(A) = \frac{a}{N}$$

統計的確率

- 実際に起こった結果を元にしてだす確率を、「**統計的確率**」という
- 例えば...
 - 実際にサイコロを60回投げたら、3の目が13回出た
 - この時点での、3の目が出た確率は $13/60$
- 事象Aの確率は、事象Aの起こった回数 r を、すべての起こった回数 n で割ったものである

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

大数の法則

- 試行 (あることを実施する) 回数を増やせば増やすほど、統計的確率が数学的確率に近づいていくことを、「**大数の法則**」という
- 例えば...
 - 実際にサイコロを1,000回投げたら、3の目が1,300回出た
 - その結果、3の目が出た確率はほぼ $1/3$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{n} = \frac{a}{N}$$

加法定理

排反前提の場合

- 2つ、または2つ以上の排反事象(同時に起こりえない事象)が起こる確率は、それぞれの確率の和である

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ P(A \cup B \cup C \dots) &= P(A) + P(B) + P(C) + \dots \end{aligned}$$

○ 排反事象

- 同時に起こりえない(2つ、または2つ以上の)事象を「**排反事象**」という

$$A \cup B = \phi$$

- 例: 52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはダイヤを引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

一般の場合

- 2つ、または2つ以上の事象が起こる確率は、それぞれの確率の和から、それぞれの事象が同時に起こる確率を引いたもの

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 例: 52枚のトランプから1枚引いたとき、ハートまたはA(エース)を引く確率は、次のとおり

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} \\ &= \frac{4}{13} \end{aligned}$$

乗法定理

条件つき確率

- 「Aが起こったときにBが起きる」事象を、 $B|A$ と表す
- 「Aが起こったときにBが起きる」事象の確率、つまり、Aが起こったという条件のもとでBが起きる確率を、「**条件つき確率**」といい、 $P(B|A)$ と表す

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 上の式の両辺に $P(A)$ を掛けると、次のように式が変形できる

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B|A)$$

- BがAに関係なく起きる(事象AとBが独立な事象である)場合、「乗法定理」が導き出せる

- 例: サイコロを投げて、奇数の目(事象A)が出たときに、それが1の目である(事象B)確率は、次のとおり

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

- A = 奇数の目が出る = {1, 3, 5}
- B = 1の目が出る = {1}

- 例: ある男女100人について結婚しているかどうか調査した結果が、次のようになった。この100人から1人を選んだとき、それが結婚している男性である確率は?

	男性	女性	合計
結婚している	26	21	47
結婚していない	29	24	53
合計	55	45	100

- A = 選んだ人が男性である = 55人
- $A \cap B$ = 結婚している男性である = 26

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{26}{55}$$

乗法定理

- 2つ、または2つ以上の互いに独立な事象が同時に(または続けて)起こる確率は、確率の積になる

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C \cdots) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \cdots$$

- 「独立事象」とは、ある事象の発生する確率が、他のいずれの事象の影響も受けない(他の事象に関係なく発生する事象)
- 例: サイコロを2回投げて、2回とも1の目が出る確率(1の目が出た後、1の目が出る確率)は、次のとおり

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

余事象

- ある事象Aについて、その事象がおこらないすべての場合(の事象)を「余事象」 $\bar{A}$ と表す
- 余事象が起こる確率を $P(\bar{A})$ と表す

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 例: サイコロを2回投げたとき、「少なくとも」1回は3の目が出る確率は、次のとおり
 - 「少なくとも～」の場合は、余事象の確率を考える
 - サイコロを1回投げて、3の目が全く出ない確率は $5/6$
 - 2回目も3の目が出ない確率は、次のようになる

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

- サイコロを2回目投げて何かが出る確率(=1) から、2回とも3の目が出ない確率をひけば、少なくとも1回は3の目が出る確率になる

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$